Lycée Jules Ferry Versailles

S si

Résistance des Matériaux (RdM)

Synthèse

1. Introduction, Objectifs de la RdM

La résistance des matériaux a trois objectifs principaux :

- la connaissance des caractéristiques mécaniques des matériaux. (comportement sous l'effet d'une action mécanique)
- l'étude de la résistance des pièces mécaniques.(résistance ou rupture)
- l'étude de la déformation des pièces mécaniques.

Ces études permettent de choisir le matériau et les dimensions d'une pièce mécanique en fonction des conditions de déformation et de résistance requises.

2. Hypothèse de la RdM, champ d'application

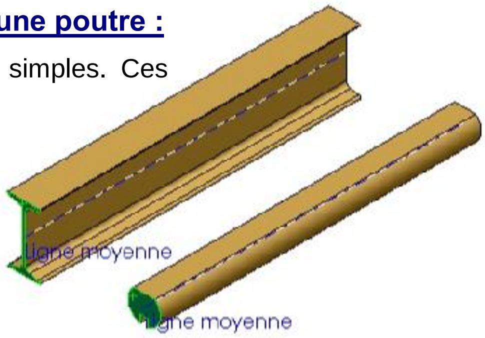
2-1) Le matériaux :

Il est **homogène** : Structure continue et identique dans toues les directions; Cette hypothèse est fausse pour tous les matériaux granuleux ou fibreux (béton, pierre, bois, composites,...)

Il est **isotrope** : Même propriétés mécaniques dans toutes les directions.
Cette hypothèse est fausse pour tous les matériaux granuleux ou fibreux.

2-2) Disposition de la matière, définition d'une poutre :

La RDM étudie des pièces dont les formes sont relativement simples. Ces pièces sont désignées sous le terme de « poutres ».



Poutre : on appelle *poutre* (voir fig.) un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane (C) appelée *ligne moyenne*.

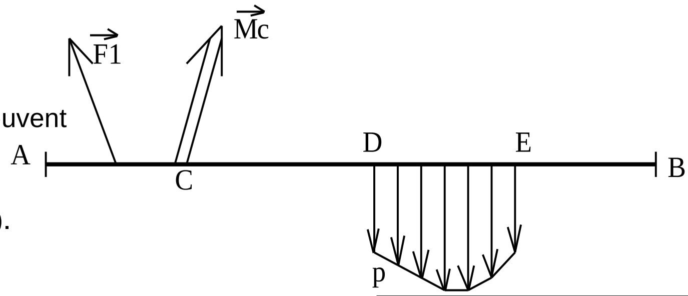
Les caractéristiques de la poutre sont :

- Ligne moyenne droite ou à grand rayon de courbure.
- Section droite (S) constante ou variant progressivement.
- Grande longueur par rapport aux dimensions transversales.
- Existence d'un plan de symétrie.

2-3) Les forces extérieures :

2 types d'actions mécaniques extérieures peuvent s'exercer sur la poutre :

- Charges concentrées ($\vec{F}_1$ ou moment $\vec{M}_C$)
- Charges réparties « p » sur DE. (exprimées en N/m).

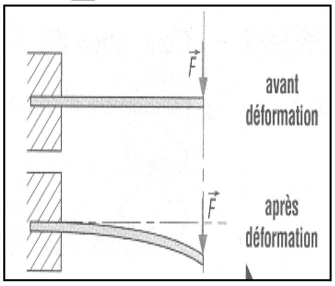


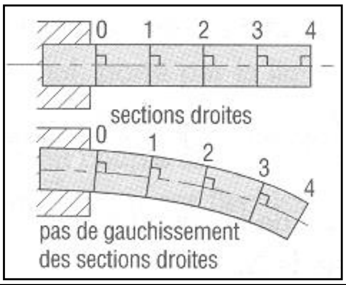
2-4) Les déformations :

Les déformations étant petites devant les dimensions de la poutre, les actions s'exerçant sur celle-ci seront calculées à partir du principe fondamental de la statique.

Les supports des forces seront eux considérés comme constants.

On néglige le décalage.



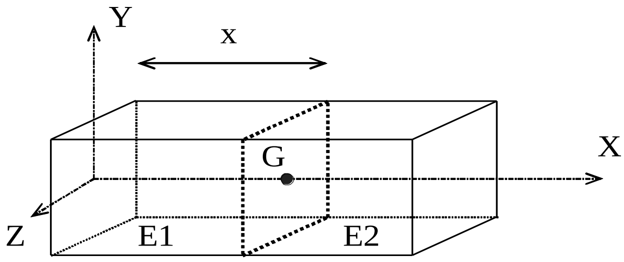


Navier & Bernoulli : Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation.

Barré de St Venan : Les résultats obtenus par la RDM ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des efforts concentrés.

3. Efforts de cohésion

Soit une poutre (E) en équilibre sous l'action de plusieurs actions extérieures. Pour étudier ce solide **déformable**, il faut modéliser ce qui se passe au sein de la matière. Pour se faire, on réalise une **coupure fictive** de la poutre située à l'abscisse x qui la sépare en 2 tronçons E1 et E2.



Les efforts de cohésion traduisent les actions de contact de (E2) sur (E1).Ces efforts de cohésion permettent à la poutre de ne pas se "disloquer" sous l'effet d'actions extérieures.

On note les efforts de cohésion de la façon suivante :

Résultante :

$$\vec{R}\left|\begin{array}{l} N \\ Ty \\ Tz \end{array}\right._R$$

- **N : effort normal**
- **Ty et Tz : efforts tranchants**

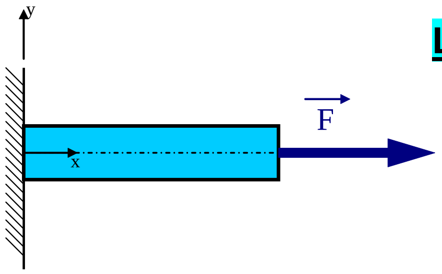
Moment :

$$\vec{M}_G\left|\begin{array}{l} Mt \\ Mfy \\ Mfz \end{array}\right._R$$

- **M_T : moment de torsion**
- **M_{fy} et M_{fz} : moments de flexion**

4. Sollicitations simples

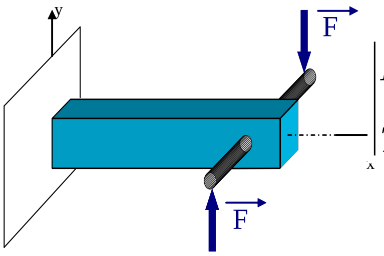
LA TRACTION – COMPRESSION :



$$\left|\begin{array}{l} \vec{N}\neq\vec{0} \\ \vec{T}=\vec{0} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \vec{M}_t=\vec{0} \\ \vec{M}_f=\vec{0} \end{array}\right.$$

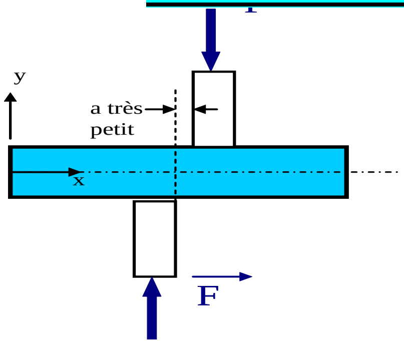
Si N > 0 : Traction
Si N < 0 : Compression

LA TORSION :



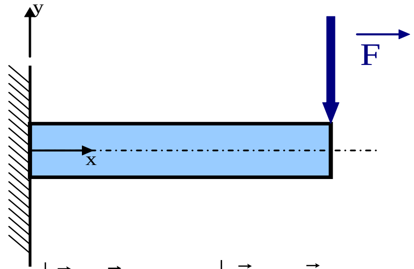
$$\left|\begin{array}{l} \vec{N}=\vec{0} \\ \vec{T}=\vec{0} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \vec{M}_t\neq\vec{0} \\ \vec{M}_f=\vec{0} \end{array}\right.$$

LE CISAILLEMENT :



$$\left|\begin{array}{l} \vec{N}=\vec{0} \\ \vec{T}\neq\vec{0} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \vec{M}_t=\vec{0} \\ \vec{M}_f=\vec{0} \end{array}\right.$$

LA FLEXION SIMPLE :



$$\left|\begin{array}{l} \vec{N}=\vec{0} \\ \vec{T}=\vec{0} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \vec{M}_t=\vec{0} \\ \vec{M}_f\neq\vec{0} \end{array}\right.$$

En résumé :

Composantes		Sollicitation
N	> 0	**Traction**
	< 0	**Compression**
Ty		**Cisaillement**
Tz		
Mt		**Torsion**
Mfy		**Flexion**
Mfz		

Remarque : *Nous avons des sollicitations composées chaque fois qu'il y a, pour une même poutre, addition de sollicitations simples.*

5. Notion de contraintes

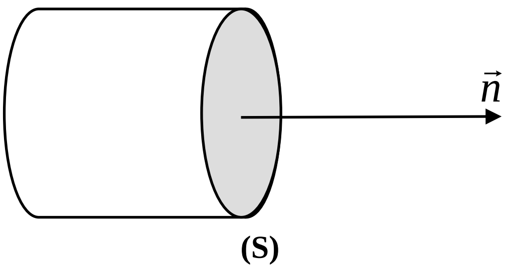
5-1) Définition :

Les efforts de cohésion induisent des contraintes à l'intérieur de la pièce qui caractérisent les actions mécaniques de cohésion interne au matériau qui existent entre les grains de matière.

Remarque : Une contrainte est assimilable à une pression. C'est un effort par unité de surface.

5-2) Contrainte NORMALE – Contrainte TANGENTIELLE :

Suivant l'orientation de la contrainte par rapport à la normale de la section, on définie 2 types de contraintes :

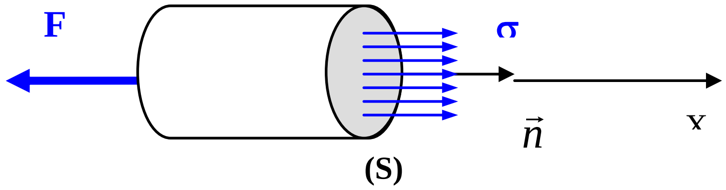


- **Contrainte normale σ :**
  La contrainte normale σ est normale à la section droite (S)
  $$\vec{\sigma} = \sigma.\vec{n}$$
- **Contrainte tangentielle τ :**
  La contrainte tangentielle τ est située dans le plan tangent à la section droite (S)

6. Sollicitations de TRACTION - COMPRESSION

6-1) Détermination de la contrainte normale:

Soit une pièce sollicitée à ses 2 extrémités par deux efforts F parallèles à l'axe longitudinal de la pièce. La répartition des contraintes dans la section (S) est uniforme et normale à la surface :



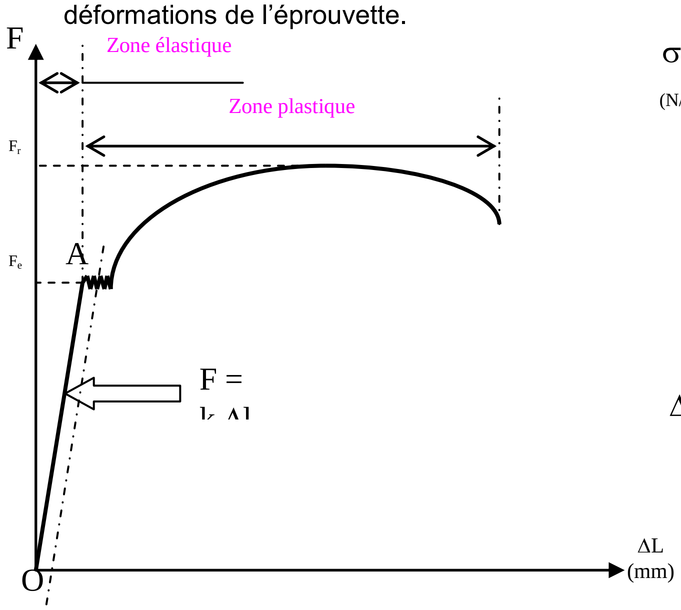
La contrainte normale de traction vaut :

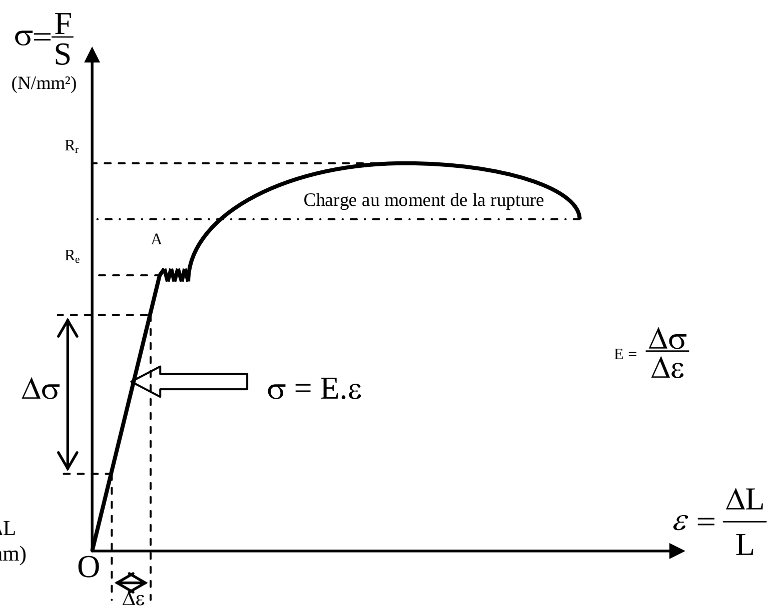
$\vec{\sigma} = \sigma.\vec{n}$ avec $\boxed{\sigma = \dfrac{N}{S}}$

$\sigma > 0$:	**Traction**	Les efforts extérieurs tendent à allonger la pièce : Allongement
$\sigma < 0$:	**Compression**	Les efforts extérieurs tendent à raccourcir la pièce : Raccourcissement

6-2) Loi de Hooke :

L'essai de traction consiste à soumettre une éprouvette normalisée à un effort de traction progressivement croissant, jusqu'à la rupture de l'éprouvette. La machine mesure les efforts appliqués et les déformations de l'éprouvette.





Loi de HOOKE :

$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$$

Avec :
- σ : contrainte normale de traction (Mpa)
- E : Module d'élasticité longitudinal (Mpa)
- ε : allongement unitaire (déformation. par unité de longueur)

E correspond à la pente de la droite du domaine élastique de l'essai de traction. Il s'appelle aussi Module d'Young.

Quelques valeurs de E :

Matériau	Fontes	Aciers	Cuivre	Aluminium	Tungstène
E (MPa)	60000à160000	200000	120000	70000	400000

6-3) Expression de la déformation élastique :

L'allongement élastique ΔL d'une pièce en traction dépend de la force de traction N, de la section S et de la longueur au repos de la pièce L.

$$\boxed{\Delta L = \frac{F.L}{E.S}}$$

Avec :
- F : norme de la force (N)
- L : longueur au repos de la pièce (mm)
- E : module de Young (Mpa)
- S : aire de la section de la pièce (mm²)

6-4) Condition de résistance :

Pour qu'une pièce résiste aux efforts de traction sans subir de déformation permanente il faut que la contrainte interne ne dépasse pas la limite élastique Re du matériau.

Pour des raisons de sécurité et compte tenu des hypothèses faites avec les modélisations, la contrainte normale σ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique à l'extension Rpe (aussi noté σpe). On considère que c'est la contrainte maximale admissible.

$$Rpe = \frac{\mathrm{Re}}{s}$$ Avec s: coefficient de sécurité >1

s = 1,5 à 3 pour des structures courantes.
s = 8 à 10 pour des structures présentant un danger pour l'homme et son environnement

- **Condition de résistance :** $$\boxed{\sigma \leq Rpe}$$

- **Concentration de contraintes :**

On a vu que la RdM s'appliquait dans le cadre d'hypothèses strictes et pour des solides de type poutre. En réalité, les structures étudiées non pas des formes idéales et présentent des singularités de forme (perçage, filetage, gorge, épaulement…).

Pour prendre en compte ces singularités, on majore les contraintes par des coefficients de concentration de contraintes kt (ou k) tels que :

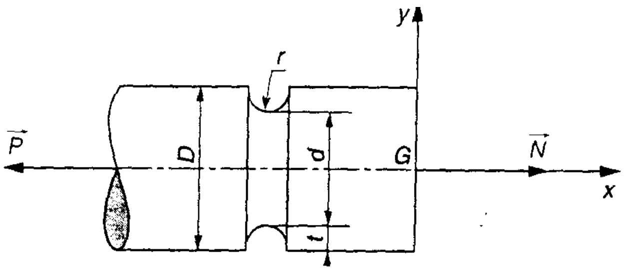
$$\boxed{k_t.\sigma \leq Rpe}$$

Càd : s * kt * σ < Re

Application :

Soit un arbre cylindrique possédant une gorge à fond demi-circulaire Cet arbre est sollicité en traction tel que N= 50000 daN.

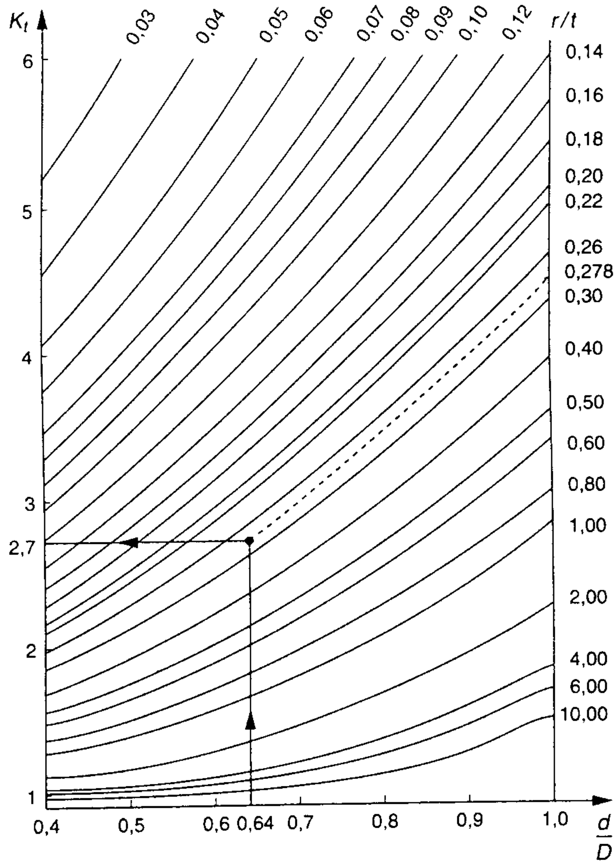
La gorge provoque une concentration de contrainte.



On donne :

D = 100 mm
d = 64 mm
r = 5 mm
Résistance élastique : Re=1000Mpa
Coefficient de sécurité : s=2

Le coefficient Kt, de concentration de contrainte peut se trouver sur l'abaque ci-dessous. Ce coefficient s'applique à la section de diamètre d = 64 mm.



1/ Calculer la contrainte dans le plus petit diamètre de l'arbre

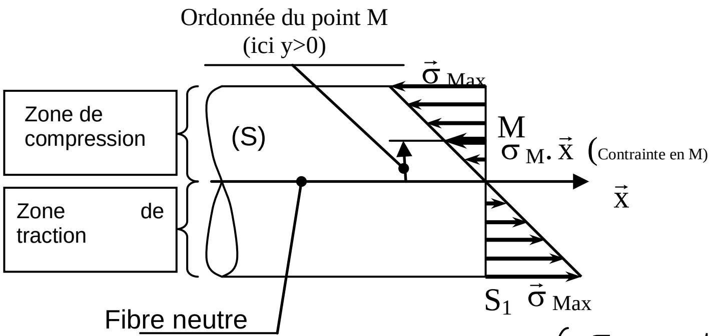
2/ Déterminer le facteur de concentrations de contraintes Kt à partir de l'abaque fourni.

3/ Calculer la contrainte maximale réelle $\sigma_{\text{réelle}} = Kt * \sigma$.

4/ Vérifier la condition de résistance $\sigma_{\text{réelle}} \leq Rpe$.

7. Sollicitation de FLEXION simple

7-1) Contraintes :



La loi de Hooke a permis de mettre en évidence que la contrainte est proportionnelle à allongement relatif. Dans le cas de la flexion plane simple, les contraintes se réduisent essentiellement à des contraintes normales.

$$\boxed{\sigma = \frac{Mf}{Iz}.y}$$

Avec :

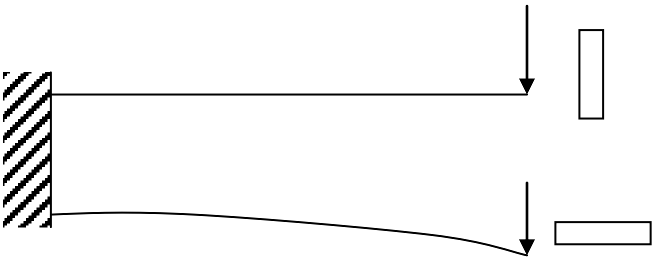
- **σ_M** : contrainte normale au point M due à la flexion (en MPa)
- **Mfz** : moment de flexion selon (G, $\vec{z}$) dans (S) (en N.mm)
- **I_{Gz}** : moment quadratique de la section droite (S) / à son axe neutre (en mm^4)
- **y** : ordonnée du point M dans (G, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$) (en mm)

Remarque : - *La contrainte normale maximale se trouve sur le point le plus éloigné de l'axe neutre (fibre moyenne).*
- *La condition de résistance en flexion est la même que en traction en prenant la valeur maximale de la contrainte.*

7-2) Moment quadratique :

Le moment quadratique caractérise la raideur de la poutre au fléchissement.

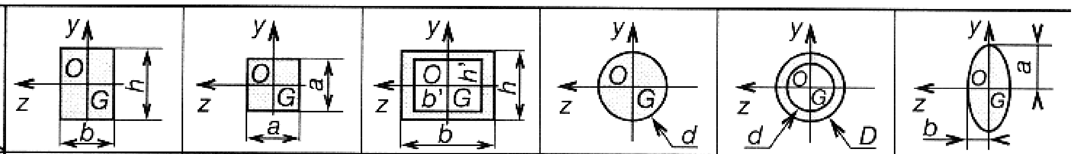
Exemple du réglet :
Un réglet fléchira facilement si il est à plat mais beaucoup moins si il est sur la tranche.



Forme de la section

Moment quadratique des sections simples :

52 ■ 521 SECTIONS PRÉSENTANT UNE SYMÉTRIE CENTRALE



Sections (S) / Caractéristiques						
I_{Gy}	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{hb^3 - h'b'^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$0{,}784\,ab^3$
I_{Gz}	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{bh^3 - b'h'^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$0{,}784\,a^3b$
$I_0 = I_G$	$\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$	$\frac{a^4}{6}$	$I_{Gy} + I_{Gz}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{4}ab(a^2 + b^2)$

8. Sollicitation de CISAILLEMENT

8-1) Contrainte dans la section droite :

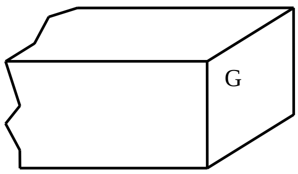
Les contraintes tangentielles $\vec{\tau}$ sont sensiblement uniformément réparties dans une section droite. On définit une contrainte moyenne τ_{moy} égale à τ si la répartition des contraintes tangentielles était uniforme.

$$\boxed{\tau_{moy} = \frac{T}{S}}$$

Avec :
- τ : contrainte tangentielle de cisaillement (Mpa)
- T : norme de l'effort tranchant (N)
- S : aire de la section droite (mm²)

$T = \|\vec{T}\| = \sqrt{T_y^2 + T_z^2}$

Répartition de la contrainte dans la section droite :



8-2) Condition de résistance :

La condition de résistance pour une sollicitation de cisaillement est la même que pour la traction en prenant en compte la résistance pratique au cisaillement (ou glissement) Rpg :

$$Rpg = \frac{Re\,g}{s}$$

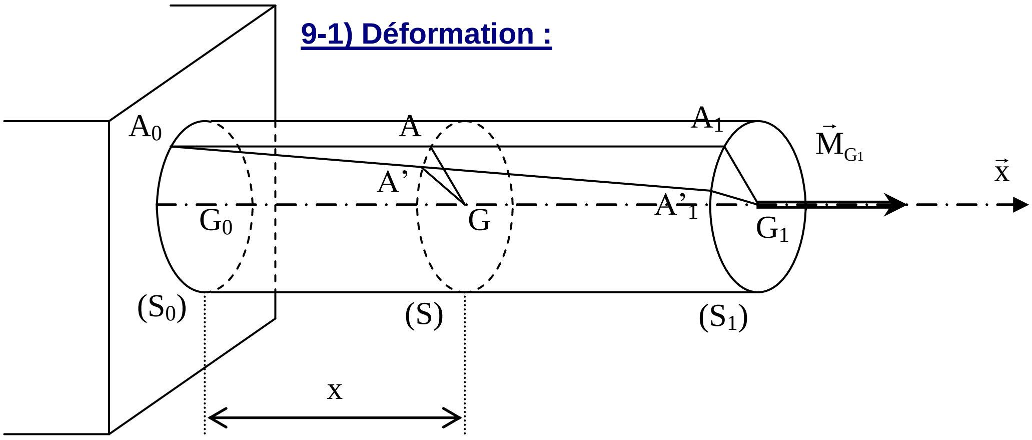
Avec : Reg : Résistance élastique au glissement (MPa)

- **Condition de résistance :**

$$\boxed{|\tau_{moy}| \leq Rpg}$$

9. Sollicitation de TORSION

9-1) Déformation :

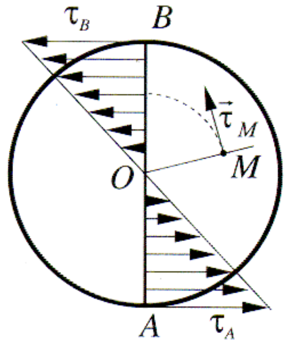


Comme l'angle α varie proportionnellement à la distance x, on peut écrire : $\boxed{\theta = \dfrac{\alpha}{x}}$

θ : angle de torsion unitaire (rad/mm).

9-2) Contrainte dans la section droite :

Après analyse, nous remarquons que la valeur de la contrainte tangentielle en un point M est proportionnelle à la distance de ce point au centre de la section. D'où la répartition des contraintes tangentielles dans la section droite :



Ce qui amène cette relation liant le rayon à la contrainte tangentielle :

$$\boxed{\tau_M = G\theta\rho_M}$$

Avec :
- τ_M : Contrainte tangentielle dans le matériau.(Mpa)
- G : module d'élasticité transversale du matériau (ou module de Coulomb) (Mpa)
- ρ_M : rayon considéré pour l'analyse (mm)

Dans le domaine élastique, le moment de torsion Mt est proportionnel à l'angle unitaire de torsion θ.

$$\boxed{Mt = G.\theta.Io}$$

Avec :
- Mt : Moment de torsion (**N.mm**)
- G : Module d'élasticité transversale (**MPa**)
- θ : Angle unitaire de torsion (**rad/mm**)
- Io : Moment quadratique de (S) par rapport à (O, $\vec{x}$) (**mm^4**)

En combinant la relation de la contrainte / déformation (1) avec la relation de la contrainte / moment de torsion (2), on obtient directement la contrainte tangentielle en fonction du moment de torsion :

$$\boxed{\tau_M = \frac{M_t}{\left[\dfrac{I_O}{\rho_M}\right]}}$$

La condition de résistance en flexion est la même que en traction en prenant la valeur maximale de la contrainte.