



Notion(s) abordée(s) en **S 729 – RDM : Sollicitations simples**  
Notion(s) requise(s) en **S 729 – RDM : cohésion d'un solide**

## NOTION DE CONTRAINTE

Lorsqu'une pièce est sollicitée, chaque point du matériau la constituant subit un certain effort.

La contrainte représente la valeur de cet effort évaluée par rapport à l'unité d'aire élémentaire d'une section droite. L'unité est donc le :

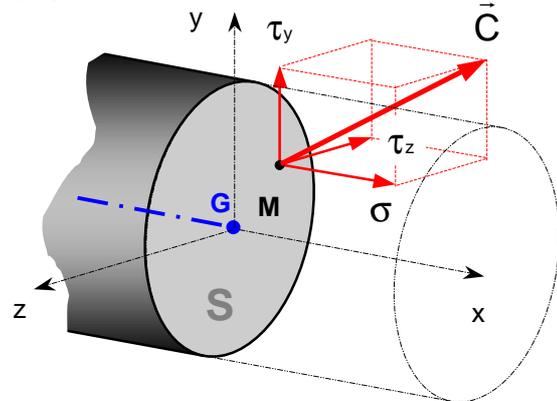
$N / m^2 = Pa$  ou  $N / mm^2 = Mpa$

Selon la direction et la nature des efforts, on distingue deux sortes de contraintes  $\sigma$  (normale) et  $\tau$  (tangentielle) qui, combinées, vont former le vecteur contrainte.

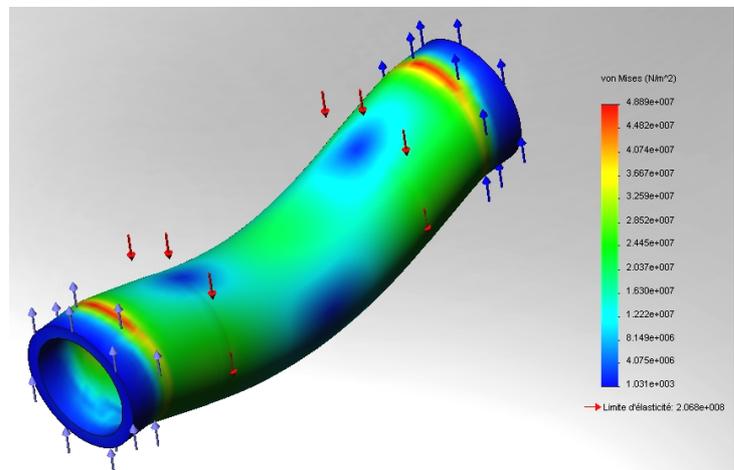
Ce vecteur modélise de façon globale la manière dont doit réagir le matériau.

C'est la valeur numérique de ce vecteur qui est fournie dans les logiciels de simulation de RDM.

Figure 1 :  
vecteur contrainte



Contrainte avec logiciel



## HYPOTHESE SUR LES DEFORMATIONS

### Hypothèse de Navier - Bernoulli :

Au cours de la déformation, toutes les sections droites restent **planes**

Document  
Professeur



Notion(s) abordée(s) en **S 729 – RDM : Sollicitations simples**  
Notion(s) requise(s) en **S 729 – RDM : cohésion d'un solide**

## TRACTION - COMPRESSION

### 1) RAPPEL AVEC LA COHESION DU SOLIDE.

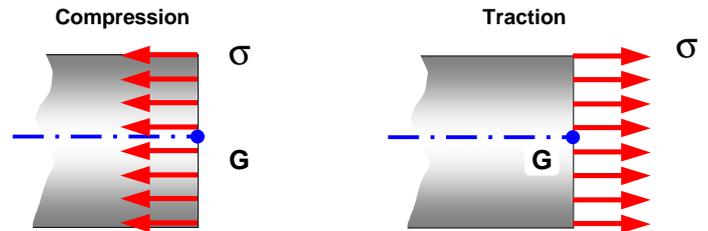
Une poutre est sollicitée en **traction - compression** quand :  $N$  du torseur de cohésion est non nulle.

### 2) CONTRAINTE.

Figure 2 : contrainte de traction - compression

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

- $\sigma$  :  $\pencil$  Contrainte normale (Mpa)
- $N$  :  $\pencil$  Effort normal (N)
- $S$  :  $\pencil$  Aire de la section droite (mm<sup>2</sup>)



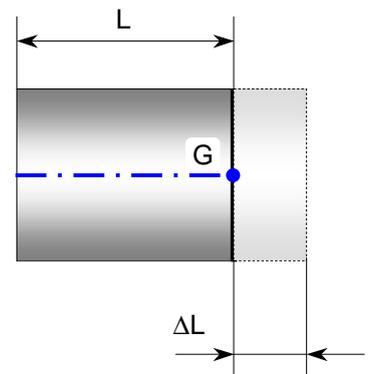
### 3) DEFORMATIONS.

La traction - compression a tendance à allonger ou raccourcir la poutre. Des essais montrent que cette déformation est proportionnelle à la contrainte normale et à la résistance du matériau. On peut ainsi exprimer la relation :

Figure 3 : déformation en traction - compression

Loi de Hooke : 
$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

- $\sigma$  :  $\pencil$  Contrainte normale (Mpa)
- $E$  :  $\pencil$  Module d'Young (élasticité longitudinale) du matériau (Mpa)
- $\Delta L$  :  $\pencil$  Déformation (allongement ou raccourcissement) de la poutre (mm)
- $L$  :  $\pencil$  Longueur initiale de la poutre (mm)



Document  
Professeur



Notion(s) abordée(s) en **S 729 – RDM : Sollicitations simples**  
Notion(s) requise(s) en **S 729 – RDM : cohésion d'un solide**

## CISAILLEMENT

### 1) RAPPEL AVEC LA COHESION DU SOLIDE.

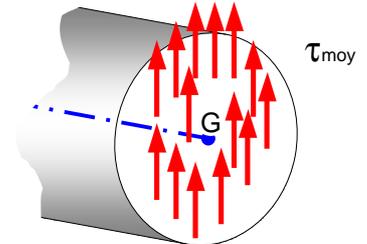
Une poutre est sollicitée en **cisaillement** quand :  $T_y$  ou / et  $T_z$  du torseur de cohésion sont non nulles.

### 2) CONTRAINTE.

Figure 4 : contrainte de cisaillement

$$\tau_{\text{moy}} = \frac{T}{S}$$

- $\tau_{\text{moy}}$  : Contrainte tangentielle moyenne (Mpa)
- T : Effort tranchant (N)
- S : Aire de la section droite (mm<sup>2</sup>)



La contrainte n'est pas constante quel que soit l'endroit dans la section droite mais à notre niveau de résolution, nous ne tenons compte d'une contrainte **moyenne supposée constante**.

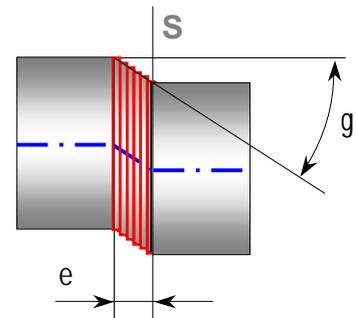
### 3) DEFORMATIONS.

Le cisaillement a tendance à faire **glisser** toutes les sections droites les unes par rapport aux autres. Elles font apparaître un « décalage », un **glissement** dans le plan des sections droites. Des essais montrent que ce glissement est proportionnel à la contrainte tangentielle et à la résistance du matériau. On peut ainsi exprimer la relation :

Figure 5 : déformation en cisaillement

$$\tau_{\text{moy}} = G \cdot \gamma$$

- $\tau_{\text{moy}}$  : Contrainte tangentielle moyenne (Mpa)
- G : Module de coulomb du matériau (Mpa)
- g : Angle de glissement (rad)



**Remarque :** e doit être « petit ».  
Au delà d'une certaine valeur, le cisaillement peut introduire de la flexion.

Document  
Professeur



Notion(s) abordée(s) en **S 729 – RDM : Sollicitations simples**  
 Notion(s) requise(s) en **S 729 – RDM : cohésion d'un solide**

## TORSION

### 1) RAPPEL AVEC LA COHESION DU SOLIDE.

Une poutre est sollicitée en **torsion** quand : **Mt du torseur de cohésion est non nulle.**

### 2) CONTRAINTE.

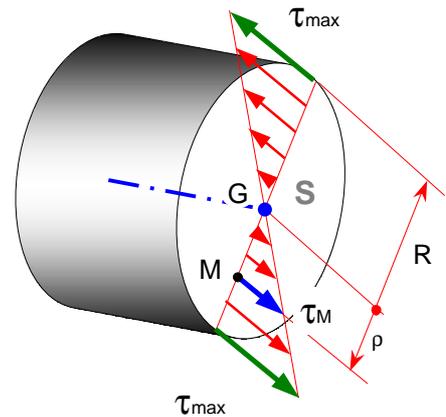
Figure 6 : contrainte de torsion

$$\tau_M = \frac{Mt}{\frac{I_0}{\rho}}$$

et

$$\tau_{\max} = \frac{Mt}{\frac{I_0}{R}}$$

- $\tau_M$  : Contrainte tangentielle de l'endroit ou point M (Mpa)
- $\tau_{\max}$  : Contrainte tangentielle maximum (Mpa)
- Mt : Moment de torsion (Nmm)
- $I_0$  : oment d'inertie quadratique polaire de la section droite ( $\text{mm}^4$ )
- $\rho$  : décalage de M par rapport à la fibre neutre (mm)
- R : Décalage maximum par rapport à la fibre neutre (mm)



### 3) DEFORMATIONS.

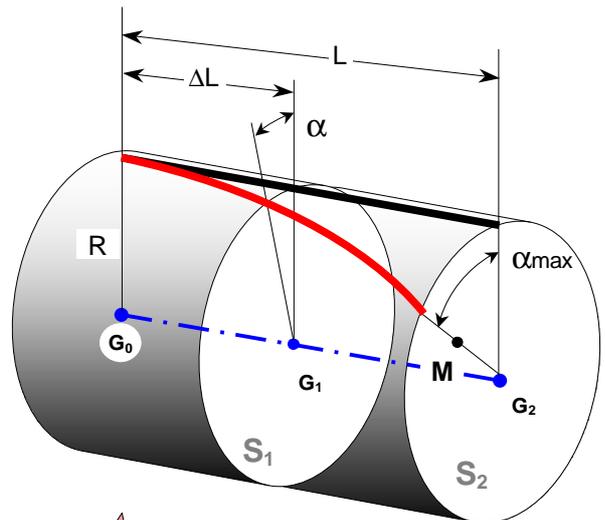
La torsion a tendance à faire **tourner** toutes les sections droites les unes par rapport aux autres. Ceci fait apparaître un « décalage angulaire », un **angle de torsion** dans le plan des sections droites. Des essais montrent que ce glissement est proportionnel à la contrainte tangentielle et à la résistance du matériau. On peut ainsi exprimer les relations :

Figure 7 : déformation en torsion

$$\tau_M = G \cdot \theta \cdot \rho \quad \text{et} \quad \tau_{\max} = G \cdot \theta \cdot R$$

$$\alpha = \theta \cdot \Delta L \quad \text{et} \quad \alpha_{\max} = \theta \cdot L$$

- $\tau_M$  et  $\tau_{\max}$  : Contrainte tangentielle (Mpa)
- G : Module de coulomb du matériau (Mpa)
- $\theta$  : Angle unitaire de torsion (rad/mm)
- $\rho$  et R : Décalages par rapport à la fibre neutre (mm)
- $\alpha$  et  $\alpha_{\max}$  : Angle de torsion (rad/mm)
- $\Delta L$  et L : Eloignement de section droite de celle de référence (mm)



Document  
Professeur



Notion(s) abordée(s) en **S 729 – RDM : Sollicitations simples**  
Notion(s) requise(s) en **S 729 – RDM : cohésion d'un solide**

## FLEXION

### 1) RAPPEL AVEC LA COHESION DU SOLIDE.

Une poutre est sollicitée en **cisaillement** quand :  $M_{fz}$  ou / et  $M_{fz}$  du **torseur de cohésion** sont non nulles.

### 2) CONTRAINTE.

Figure 8 : contrainte de flexion

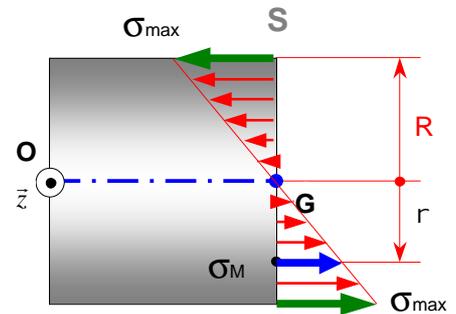
$$\sigma_M = \frac{-Mfz}{\frac{I_{Gz}}{\rho}}$$

et

$$\sigma_{max} = \frac{-Mfz}{\frac{I_{Gz}}{R}}$$

Les formules sont données avec une flexion autour de l'axe z mais il est tout à fait possible qu'elle s'applique autour d'un autre axe. Il faut adapter dans ce cas la notation à l'étude.

- $\sigma_M$  : Contrainte normale de l'endroit ou point M (Mpa) (orientée)
- $\sigma_{max}$  : Contrainte normale maximum (Mpa) (orientée)
- $Mfz$  : Moment de flexion autour de l'axe z (Nmm)
- $I_{Gz}$  : Moment d'inertie quadratique de la section droite par rapport à l'axe z ( $mm^4$ )
- $\rho$  : Décalage de M par rapport à la fibre neutre (mm)
- R : Décalage maximum par rapport à la fibre neutre (mm)



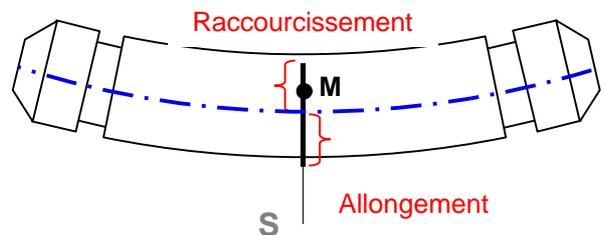
### 3) DEFORMATIONS.

La flexion a tendance à produire des effets similaires à la traction - compression. Toutefois, de par son inconstance, pour un même chargement mécanique, la poutre est à la fois allongée et raccourcie. La **loi de Hooke** peut donc s'appliquer mais les variations  $\Delta L$  de longueur sont différentes selon l'endroit considéré dans la poutre. Ainsi il n'y a pas de variation de longueur de la fibre neutre car la contrainte normale y est nulle.

Figure 9 : déformation en flexion

$$\text{Loi de Hooke : } \sigma_M = E \cdot \frac{\Delta L_M}{L_M}$$

- $\sigma_M$  : Contrainte normale au point M (Mpa) (orientée)
- E : Module d'Young (élasticité longitudinal) du matériau (Mpa)
- $\Delta L_M$  : Variation de longueur au décalage du point M (mm)
- $L_M$  : Longueur initiale de la poutre au décalage du point M (mm)



Document  
Professeur



Notion(s) abordée(s) en **S 729 – RDM : Sollicitations simples**  
Notion(s) requise(s) en **S 729 – RDM : cohésion d'un solide**

## CONDITIONS PARFAITES ET REELLES

### 1) PHENOMENE DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE.

Lorsqu'une pièce mécanique présente un accident de forme (congé, filetage, trou de goupille, gorge, etc.), on constate expérimentalement que la contrainte réelle est supérieure à celle obtenue par le calcul dans la zone environnant l'accident (voir figure 10 ci-contre). On définit alors un **coefficient de concentration de contrainte**  $K_t$  tel que :

Figure 10

$$K_t = \frac{\sigma_{\max \text{ réelle}}}{\sigma_{\max \text{ nominale}}}$$

Contrainte normale :  
• Traction / compression  
• Flexion.

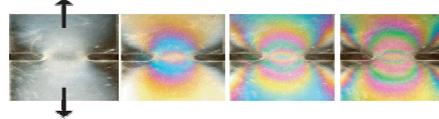
$$K_t = \frac{\tau_{\max \text{ réelle}}}{\tau_{\max \text{ nominale}}}$$

Contrainte tangentielle :  
• Cisaillement  
• Torsion

barreau soumis à une contrainte croissante (gauche à droite)



barreau **entaillé** soumis à une contrainte croissante (gauche à droite)



### 2) DETERMINATION DU COEFFICIENT DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE.

Le coefficient  $K_t$  est déterminé expérimentalement. Il dépend essentiellement de trois éléments :  
1) La géométrie de l'accident,  
2) La géométrie de la pièce,  
3) Le type de sollicitation.

- La géométrie de l'accident,
- La géométrie de la pièce,
- Le type de sollicitation.

La façon la plus pratique de le déterminer, en l'absence d'un modèle mathématique plus performant, est d'utiliser des courbes ou abaques propres à chaque cas de figure (non fournies dans ce cours mais disponible dans le site élève).

Document  
Professeur

## CONDITIONS DE RESISTANCE

Cette condition exprime l'inégalité qui doit exister entre la valeur de la contrainte à supporter et ce dont est capable le matériau en terme de résistance mécanique. Elle prend une forme différente selon la sollicitation :

Condition pour la traction – compression et la flexion

$$\sigma_{\max} \leq \frac{R_e}{s}$$

$\sigma_{\max}$  : Contrainte normale maximum (Mpa)  
 $R_e$  : Résistance élastique à l'extension du matériau (Mpa)  
 $s$  : Coefficient de sécurité

Condition pour le cisaillement et la torsion

$$\tau_{\max} \leq \frac{R_g}{s}$$

$\tau_{\max}$  : Contrainte tangentielle maximum (Mpa)  
 $R_g$  : Résistance élastique au cisaillement du matériau (Mpa)  
 $s$  : Coefficient de sécurité

### Remarques :

- L'inégalité porte également le nom **d'équation d'équarrissage**.
- $s$  est déterminé en fonction du domaine d'application de la pièce.
- On admet que la résistance élastique au cisaillement est proportionnelle à la résistance élastique à l'extension. On prendra les coefficients ci-contre.
- La condition de résistance n'est valable que pour un chargement mécanique statique. Si les AME supportées sont dynamiques (notamment alternatives), alors  $R_e/s$  et  $R_g/s$  doivent être remplacés par une limite de fatigue (en Mpa mais bien plus faible en valeur).

Acier doux et mi-doux :  $R_g = 0,5 \cdot R_e$

Acier mi-dur :  $R_g = 0,7 \cdot R_e$

Acier dur et très dur :  $R_g = 0,8 \cdot R_e$

Alliages d'aluminium :  $R_g = 0,5 \cdot R_e$