NOTION DE CONTRAINTE

Lorsqu'une pièce est sollicitée, chaque point du matériau la constituant subit un certain effort.

La contrainte représente la valeur de cet effort évaluée par rapport à l'unité d'aire élémentaire d'une section droite. L'unité est donc le :

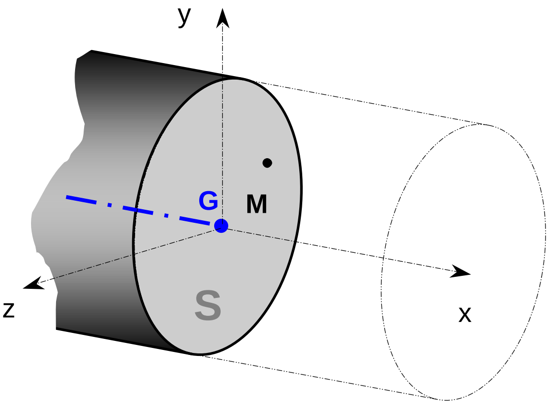
✎

Selon la direction et la nature des efforts, on distingue deux sortes de contraintes σ (normale) et τ (tangentielle) qui, combinées, vont former le vecteur contrainte.

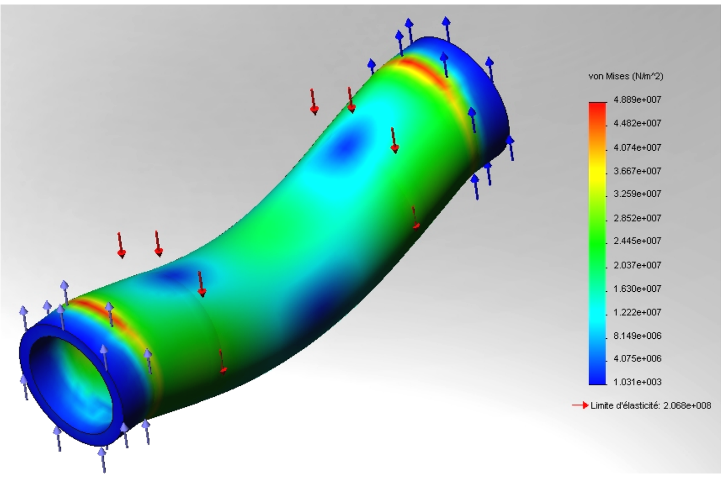
Ce vecteur modélise de façon globale la manière dont doit réagir le matériau.

C'est la valeur numérique de ce vecteur qui est fournie dans les logiciels de simulation de RDM.

Figure 1 :
vecteur contrainte



Contrainte avec logiciel



HYPOTHESE SUR LES DEFORMATIONS

Hypothèse de Navier - Bernoulli :

Au cours de la déformation, toutes les sections droites restent ***planes***

TRACTION - COMPRESSION

1) RAPPEL AVEC LA COHESION DU SOLIDE.

Une poutre est sollicitée en ***traction - compression*** quand :

2) CONTRAINTE.

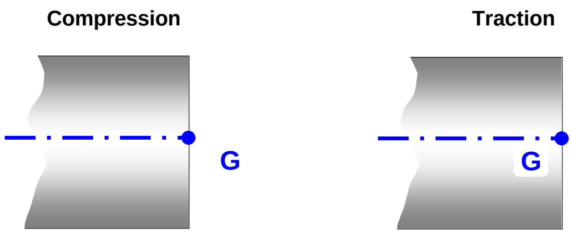
Figure 2 : contrainte de traction - compression

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

σ :

N :

S :



3) DEFORMATIONS.

La traction - compression à tendance à allonger ou raccourcir la poutre. Des essais montrent que cette déformation est proportionnelle à la contrainte normale et à la résistance du matériau. On peut ainsi exprimer la relation :

Figure 3 : déformation en traction - compresion

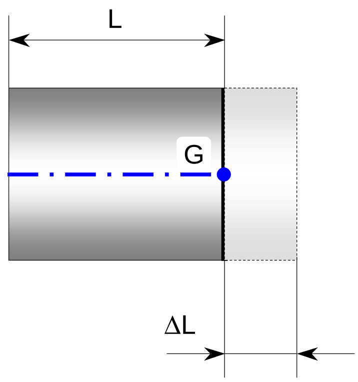
Loi de Hooke : $\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$

σ :

E :

ΔL :

L :



CISAILLEMENT

1) RAPPEL AVEC LA COHESION DU SOLIDE.

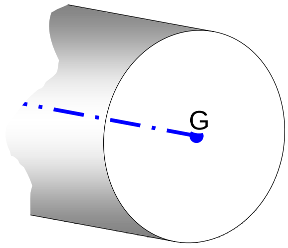
Une poutre est sollicitée en ***cisaillement*** quand :

2) CONTRAINTE.

Figure 4 : contrainte de cisaillement

$$\tau_{moy} = \frac{T}{S}$$

τ_{moy} :
T :
S :



La contrainte n'est pas constante quel que soit l'endroit dans la section droite mais à notre niveau de résolution, nous ne tenons compte d'une contrainte ***moyenne supposée constante***.

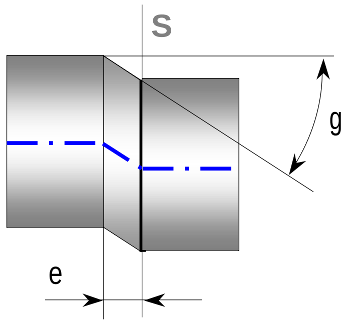
3) DEFORMATIONS.

Le cisaillement à tendance à faire ***glisser*** toutes les sections droites les unes par rapport aux autres. Elles font apparaître un « décalage », un ***glissement*** dans le plan des sections droites. Des essais montrent que ce glissement est proportionnel à la contrainte tangentielle et à la résistance du matériau. On peut ainsi exprimer la relation :

Figure 5 : déformation en cisaillement

$$\tau_{moy} = G \,.\, \gamma$$

τ_{moy} :
G :
g :



Remarque : e doi être « petit ».
Au delà d'une certaine valeur, le cisaillement peut introduire de la flexion.

TORSION

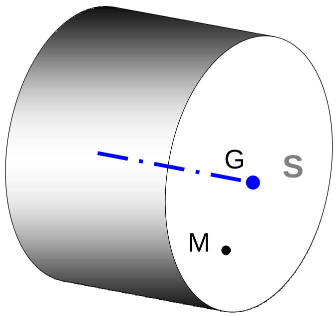
1) RAPPEL AVEC LA COHESION DU SOLIDE.

Une poutre est sollicitée en ***torsion*** quand :

2) CONTRAINTE.

Figure 6 : contrainte de torsion

$$\tau_M = \frac{Mt}{\frac{I_0}{\rho}} \quad \text{et} \quad \tau_{max} = \frac{Mt}{\frac{I_0}{R}}$$



τ_M :	Contrainte tangentielle de l'endroit ou point M (Mpa)
τ_{max} :	Contrainte tangentielle maximum (Mpa)
Mt :	Moment de torsion (Nmm)
I_0 :	oment d'inertie quadratique polaire de la section droite (mm^4)
ρ :	décalage de M par rapport à la fibre neutre (mm)
R :	Décalage maximum par rapport à la fibre neutre (mm)

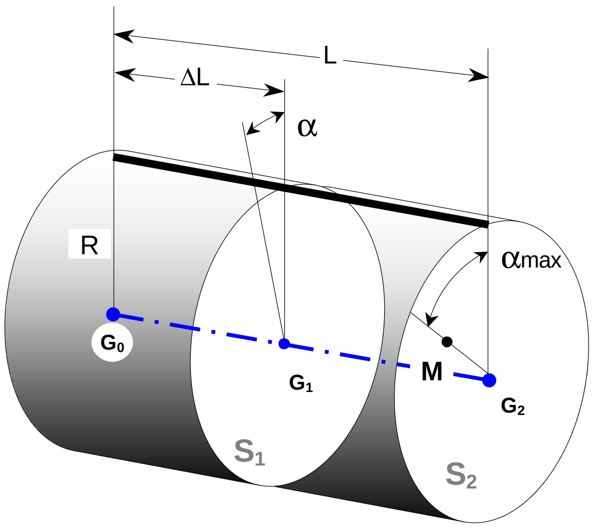
3) DEFORMATIONS.

La torsion à tendance à faire ***tourner*** toutes les sections droites les unes par rapport aux autres. Ceci fait apparaître un « décalage angulaire », un ***angle de torsion*** dans le plan des sections droites. Des essais montrent que ce glissement est proportionnel à la contrainte tangentielle et à la résistance du matériau. On peut ainsi exprimer les relations :

Figure 7 : déformation en torsion

$$\tau_M = G \cdot \theta \cdot \rho \quad \text{et} \quad \tau_{max} = G \cdot \theta \cdot R$$

$$\alpha = \theta \cdot \Delta L \quad \text{et} \quad \alpha_{max} = \theta \cdot L$$



τ_M et τ_{max} :	Contrainte tangentielle (Mpa)
G :	Module de coulomb du matériau (Mpa)
θ:	Angle unitaire de torsion (rad/mm)
ρ et R :	Décalages par rapport à la fibre neutre (mm)
α et α_{max} :	Angle de torsion (rad/mm)
ΔL et L :	Eloignement de section droite de celle de référence (mm)

FLEXION

1) RAPPEL AVEC LA COHESION DU SOLIDE.

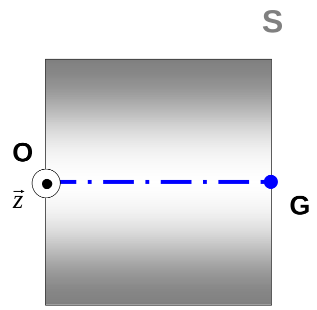
Une poutre est sollicitée en ***cisaillement*** quand : ✎

2) CONTRAINTE.

Figure 8 : contrainte de flexion

Les formules sont données avec une flexion autour de l'axe z mais il est tout à fait possible qu'elle s'applique autour d'un autre axe. Il faut adapter dans ce cas la notation à l'étude.

$$\sigma_M = \frac{-Mfz}{\frac{I_{Gz}}{\rho}} \quad \text{et} \quad \sigma_{max} = \frac{-Mfz}{\frac{I_{Gz}}{R}}$$



σ_M : Contrainte normale de l'endroit ou point M (Mpa) (orientée)

σ_{max} : Contrainte normale maximum (Mpa) (orientée)

Mfz : Moment de flexion autour de l'axe z (Nmm)

I_{Gz} : Moment d'inertie quadratique de la section droite par rapport à l'axe z (mm^4)

ρ : Décalage de M par rapport à la fibre neutre (mm)

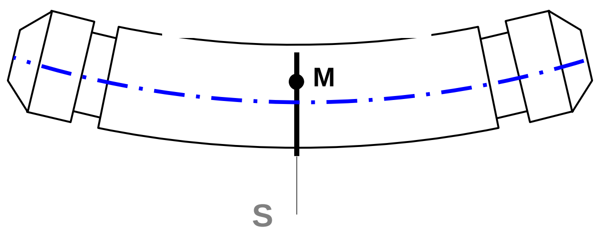
R : Décalage maximum par rapport à la fibre neutre (mm)

3) DEFORMATIONS.

La flexion à tendance à produire des effets similaires à la traction - compression. Toutefois, de par son inconstance, pour un même chargement mécanique, la poutre est à la fois allongée et raccourcie. La ***loi de Hooke*** peut donc s'appliquer mais les variations ΔL de longueur sont différentes selon l'endroit considéré dans la poutre. Ainsi il n'y a pas de variation de longueur de la fibre neutre car la contrainte normale y est nulle.

Figure 9 : déformation en flexion

Loi de Hooke : $\sigma_M = E \cdot \frac{\Delta L_M}{L_M}$



σ_M : Contrainte normale au point M (Mpa) (orientée)

E : Module d'Young (élasticité longitudinal) du matériau (Mpa)

ΔL_M : Variation de longueur au décalage du point M (mm)

L_M : Longueur initiale de la poutre au décalage du point M (mm)

ETUDE DES CONSTRUCTIONS

Notion(s) abordées(s) en	**S 729 –** RDM : Sollicitations simples
Notion(s) requise(s) en	**S 729 –** RDM : cohésion d'un solide

CONDITIONS PARFAITES ET REELLES

1) PHENOMENE DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE.

Lorsqu'une pièce mécanique présente un accident de forme (congé, filetage, trou de goupille, gorge, etc.), on constate expérimentalement que la contrainte réelle est supérieure à celle obtenue par le calcul dans la zone environnant l'accident (voir figure 10 ci-contre). On définit alors un ***coefficient de concentration de contrainte*** K_t tel que :

Figure 10

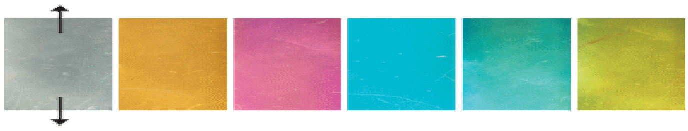
$$K_t = \frac{\sigma_{\text{max réelle}}}{\sigma_{\text{max nominale}}}$$

Contrainte normale :
- Traction / compression
- Flexion.

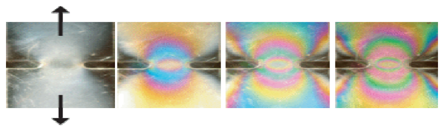
$$K_t = \frac{\tau_{\text{max réelle}}}{\tau_{\text{max nominale}}}$$

Contrainte tangentielle :
- Cisaillement
- Torsion

barreau soumis à une contrainte croissante (gauche à droite)



barreau **entaillé** soumis à une contrainte croissante (gauche à droite)



2) DETERMINATION DU COEFFICIENT DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE.

Le coefficient K_t est déterminé expérimentalement. Il dépend essentiellement de trois éléments particuliers :

- La géométrie de l'accident,
- La géométrie de la pièce,
- Le type de sollicitation.

La façon la plus pratique de le déterminer, en l'absence d'un modèle mathématique plus performent, est d'utiliser des courbes ou abaques propres à chaque cas de figure (non fournies dans ce cours mais disponible dans le site élève).

CONDITIONS DE RESITANCE

Cette condition exprime l'inégalité qui doit exister entre la v aleur de la contrainte à supporter et ce dont est capable le matériau en terme de résistance mécanique. Elle prend une forme différente selon la sollicitation :

Condition pour la traction – compression et la flexion

$$\sigma_{max} \leq \frac{R_e}{s}$$

σ_{max} : Contrainte normale maximum (Mpa)
Re : Résistance élastique à l'extension du matériau (Mpa)
s : Coefficient de sécurité

Condition pour le cisaillement et la torsion

$$\tau_{max} \leq \frac{R_g}{s}$$

τ_{max} : Contrainte tangentielle maximum (Mpa)
Rg : Résistance élastique au cisaillement du matériau (Mpa)
s : Coefficient de sécurité

Remarques :

- L'inégalité porteégalement le nom ***d'équation d'équarrissage***.
- s est déterminé en fonction du domaine d'application de la pièce.
- On admet que la résistance élastique au cisaillement est proportionnelle à la résistance élastique à l'extension. On prendra les coefficients ci-contre.

Acier doux et mi-doux :	$Rg = 0{,}5 \cdot Re$
Acier mi-dur :	$Rg = 0{,}7 \cdot Re$
Acier dur et très dur :	$Rg = 0{,}8 \cdot Re$
Alliages d'aluminium :	$Rg = 0{,}5 \cdot Re$

- La condition de résistance n'est valable que pour un chargement mécanique statique. Si les AME supportées sont dynamiques (notamment alternatives), alors Re/s et Rg/s doivent être remplacés par une limite de fatigue (en Mpa mais bien plus faible en valeur).