Document prof	Cours : Cinématique	Bac SI

L'étude cinématique d'un système correspond à **l'étude des mouvements.**

L'étude des mouvements traite :

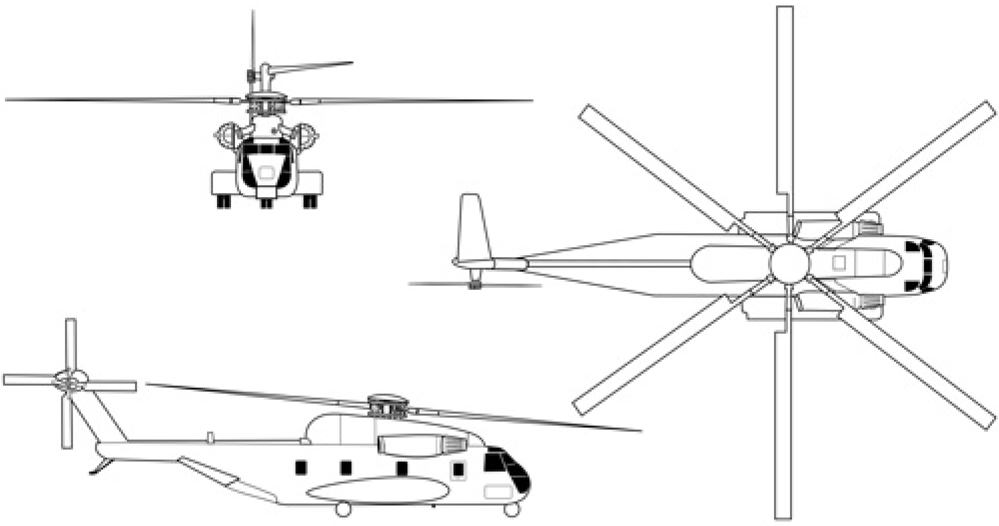
- des **trajectoires ;**
- des **vitesses de rotation ;**
- des **vitesses de translation** ;
- des **accélérations (angulaires ou linéaires)**.

1. « Fil conducteur du cours »

En guise de « fil conducteur » nous nous intéresserons à un hélicoptère CH53K dont un extrait de cahier des charges fonctionnel dans sa phase de vol en translation horizontale en régime établi (vitesse constante) par rapport au sol.

Exigence	Critère	Niveau
E1	... Vitesse de déplacement ...	... 290km/h ...

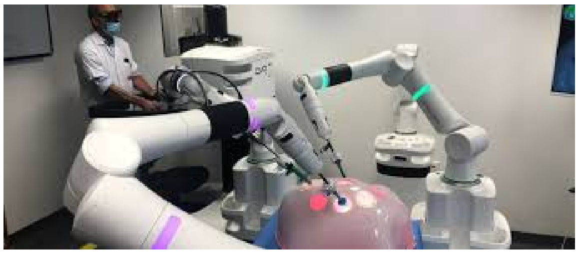
L'objectif est de vérifier que l'hélicoptère atteint le critère de vitesse de déplacement du cahier des charges sans que l'extrémité de ses pâles ne dépasse la vitesse du son (340 $m.s^{-1}$).



Longueur des pales : 11 m
vitesse de rotation du rotor : 5200 $tr.min^{-1}$

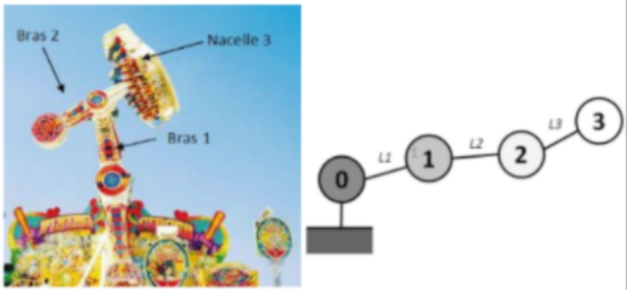
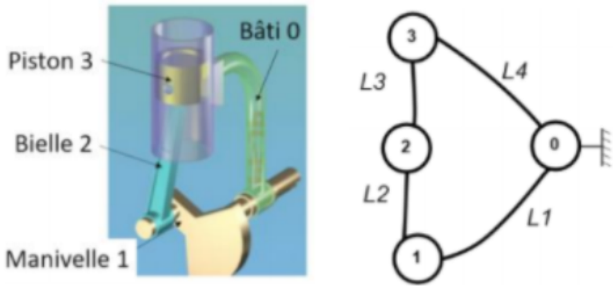
2. Pourquoi l'étude des mouvements ?

Pour de nombreux systèmes (par exemple un robot chirurgical), un des principaux enjeux des concepteurs est de faire en sorte qu'ils respectent parfaitement la cinématique imposée par leur cahier des charges.

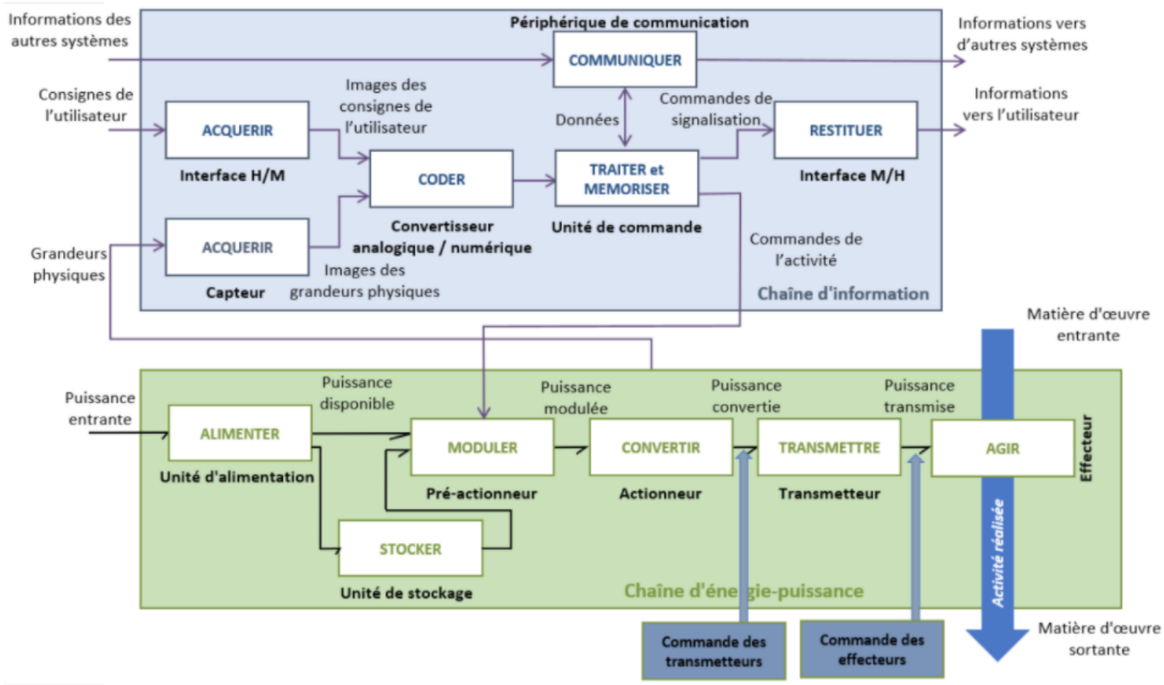


L'objectif d'un ingénieur est de définir les lois de commande en mouvement à imposer aux transmetteurs de chaque chaîne d'énergie-puissance constituant le système.

<u>Ces lois de commande sont de deux types en fonction des mécanismes rencontrés :</u>

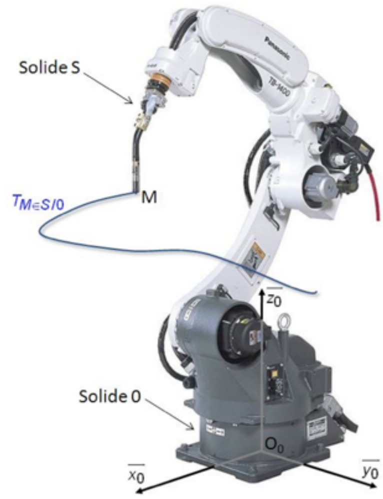
Chaîne ouverte	Chaîne fermée
Exemple : Manège 	**Exemple :** bielle-manivelle 
Les paramètres du mouvements sont tous indépendants. Chaque liaison est motrice.	Les paramètres du mouvements sont tous dépendants. Une seule liaison est motrice.

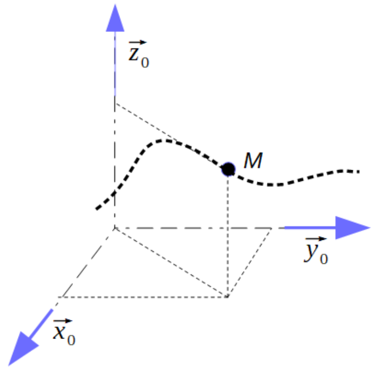
<u>Situation de ce domaine de l'ingénierie dans la chaine d'énergie-puissance</u>

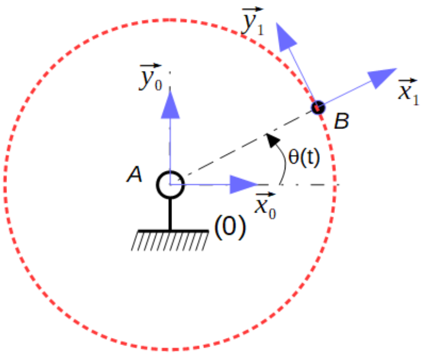


3. Cinématique du point et cinématique du solide

La cinématique du point s'intéresse uniquement à **un point** tel que le point « M » sur le robot ci-contre ou « M » et « B » sur les figures ci-après.







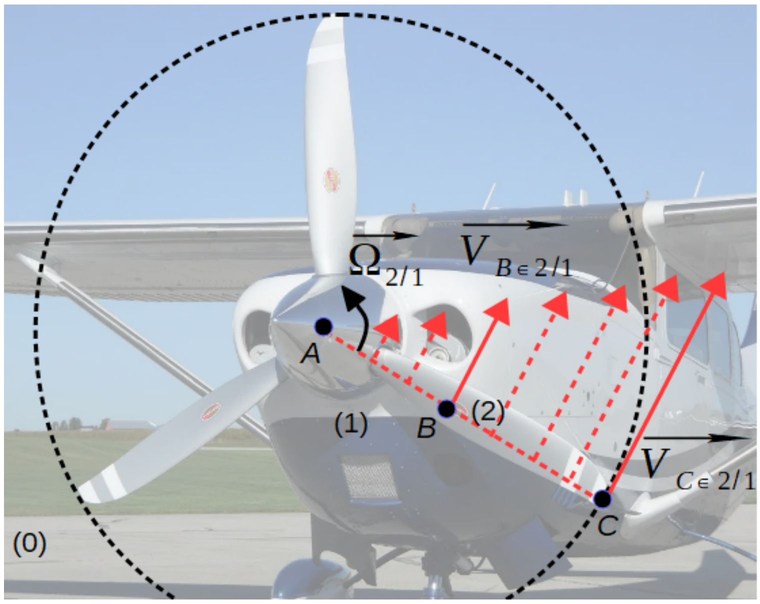
Dans chacun des cas ci-dessus le point est en mouvement de translation, circulaire ou curviligne. Jamais le point ne tourne sur lui même. La cinématique du point suffit à l'étude d'un tel point matériel.

Dès lors que l'objet tourne sur lui-même voire se translate en même temps, il faut utiliser la cinématique du solide indéformable.

Dans l'exemple ci-contre, l'hélice de l'avion est un solide indéformable.

On voit donc apparaître (en rouge) ce que l'on appelle un <u>champ de vecteurs</u>.

Ce champ de vecteur peut être caractérisé par un outil mathématique : le **{Torseur}**.



<u>Ecriture du torseur</u> $\{T_{2/1}\}$ <u>au point B :</u>

$$\{v_{2/1}\}=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\\ \overrightarrow{V_{B\in 2/1}}\end{Bmatrix}_B$$

<u>**Intérêt du {Torseur} :**</u> un torseur cinématique suffit à caractériser les champs de vecteurs d'un solide. Cela signifie que connaissant la **Résultante** (ici $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$) et le **Moment** (ici une vitesse en un point, par exemple en A $\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}$) il est possible de déterminer tous les moments (ici les vitesses $\overrightarrow{V_{B\in 2/1}}, \overrightarrow{V_{C\in 2/1}}, ..$) en n'importe quel point.

4. Bases de l’outil Torseur (généralités vraies pour tous les torseurs)

Cette partie présente les généralités du Torseur, outil que l’on retrouve en Statique, <u>Cinématique</u>, Dynamique, etc.

1 Torseur ⟺ 2 vecteurs ⟺ 6 scalaires

Résultante — Moment — Composantes de la résultante — Composantes du moment

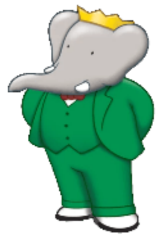
$$\{T\}=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R^{te}}\\ \overrightarrow{M_P^t(\overrightarrow{R^{te}})}\end{Bmatrix}_{P,R}=\begin{Bmatrix}X & L\\ Y & M\\ Z & N\end{Bmatrix}_{P,R}=\begin{Bmatrix}X\cdot\vec{x}+Y\cdot\vec{y}+Z\cdot\vec{z}\\ L\cdot\vec{x}+M\cdot\vec{y}+Z\cdot\vec{z}\end{Bmatrix}_P$$

Point de réduction

Base dans laquelle est exprimée le torseur

La **relation de Varignon** permet d’exprimer un Moment en un point (B dans l’exemple) connaissant le Moment en un autre point (A dans l’exemple)

$$\overrightarrow{M_B^t(\overrightarrow{R^{te}})}=\underbrace{\overrightarrow{M_A^t(\overrightarrow{R^{te}})}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{R^{te}}}_{\text{BABAR}}$$



5. Le torseur cinématique

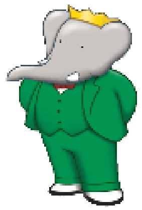
Un solide peut être en translation, en rotation ou les deux à la fois. Un outils mathématique, le torseur noté entre accolades {Torseur} permet de définir en tout point du solide ses champs de vitesses.

Résultante — Moment — Composantes de la résultante — Composantes du moment

$$\{V_{S/R}\}=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\\ \overrightarrow{V_{B\in S/R}}\end{Bmatrix}_{P,R}=\begin{Bmatrix}\omega_x & V_x\\ \omega_y & V_y\\ \omega_z & V_z\end{Bmatrix}_{P,R}=\begin{Bmatrix}\omega_x\cdot\vec{x}+\omega_y\cdot\vec{y}+\omega_z\cdot\vec{z}\\ V_x\cdot\vec{x}+V_y\cdot\vec{y}+V_z\cdot\vec{z}\end{Bmatrix}_P$$

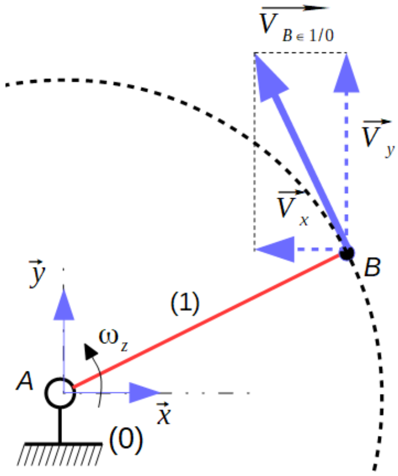
Relation de Varignon appliquée au torseur cinématique :

$$\underbrace{\overrightarrow{V_{B\in S/R}}=\overrightarrow{V_{A\in S/R}}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}_{\text{BABAR } (\Omega \text{ est la résultante!})}$$

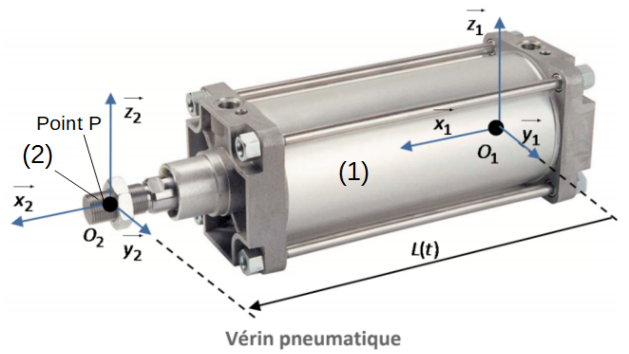


Dans la majorité des cas la rotation se fait dans un plan, la conséquence est la suivante :

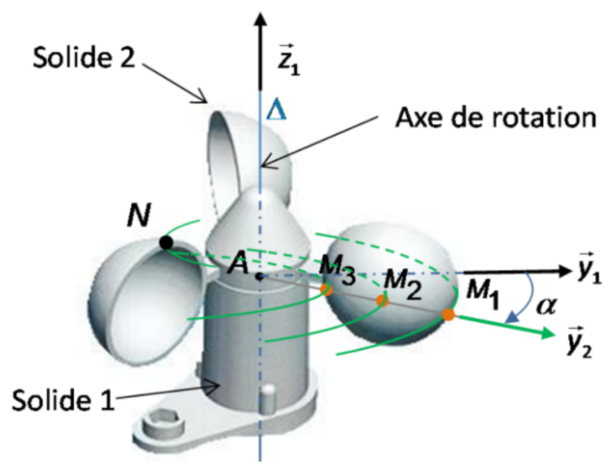
$$\{v_{1/0}\}=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\\ \overrightarrow{V_{B\in1/0}}\end{Bmatrix}_{B,R_0}=\begin{Bmatrix}0 & V_x\\ 0 & V_y\\ \omega_z & 0\end{Bmatrix}_{B,R_0}=\begin{Bmatrix}\omega_z\cdot\vec{z}\\ V_x\cdot\vec{x}+V_y\cdot\vec{y}\end{Bmatrix}_B$$



Cas d'une translation pure

	$\{v_{2/1}\}=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \overrightarrow{V_{P\in2/1}}\end{Bmatrix}_{P,R_1}$

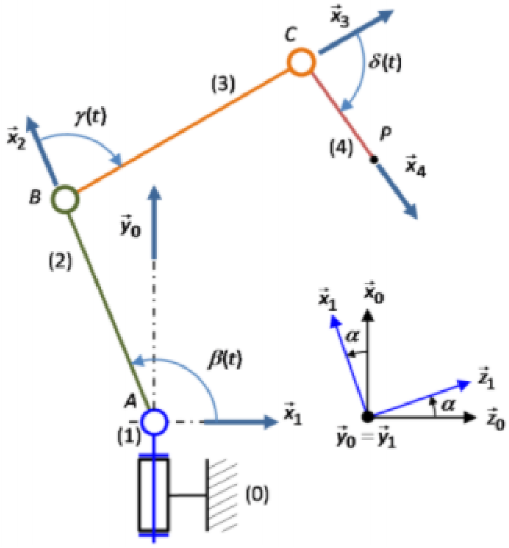
Cas d'une rotation pure

	$\{v_{2/1}\}=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_{A,R_1}$

6. Le schéma cinématique comme base de travail

Nous concernant les « objets » seront pour majeure partie <u>des mécanismes</u> modélisés par des schémas cinématiques sur lesquels différents repères (R_0, R_1, etc) seront posés afin de mener des calculs de cinématique.

Exemple :

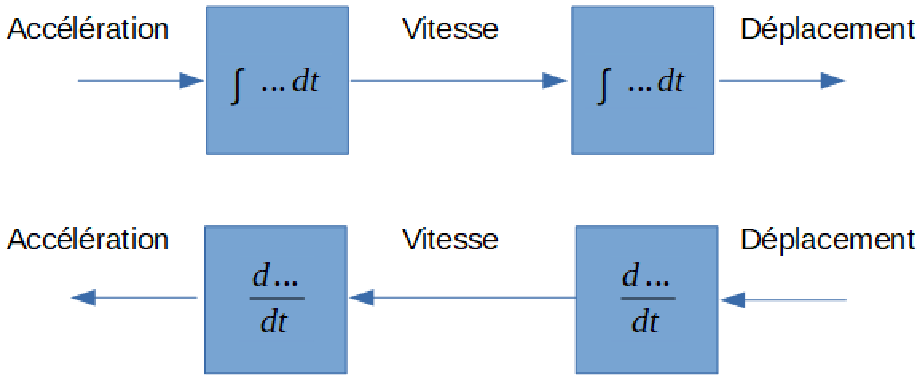


7. Outils mathématiques utilisés en cinématique

Dans ce cours nous allons utiliser l'outil dérivée.
Pour rappel le tableau ci-dessous fait le lien entre la notation utilisée en **mathématique** et celle utilisée en **ingénierie**.

En mathématique	En ingénierie
$y=a\cdot x^2+b\cdot x+z^3$ $y'=2\cdot a\cdot x+b$ $y''=2\cdot a$ En mathématique, la plupart du temps, la variable de dérivation est « x ». Si les dérivées se font par rapport à la variable « z », les dérivées seraient les suivantes : $y'=3\cdot z^2$ $y''=6\cdot z$	En ingénierie, il faut toujours préciser la variable de dérivation. La notation diffère donc de celle utilisée en mathématique. $y=a\cdot x^2+b\cdot x+z^3$ $\frac{dy}{dx}=2\cdot a\cdot x+b$ $\frac{d^2y}{dx^2}=2\cdot a$
En cinématique, la variable de dérivation sera le temps « t ». Le « x » des mathématiques est remplacé par « t » $y=a\cdot t^2+b\cdot t$ $\frac{dy}{dt}=2\cdot a\cdot t+b$ $\frac{d^2y}{dt^2}=2\cdot a$	
Notation particulières des dérivées temporelles (dérivation par rapport à « t »)	
$\frac{dy}{dt}=\dot{y}$ (se promonce « y point »)	$\frac{d^2y}{dt^2}=\ddot{y}$ (se prononce « y <u>deux</u> points » ou « y point point »)

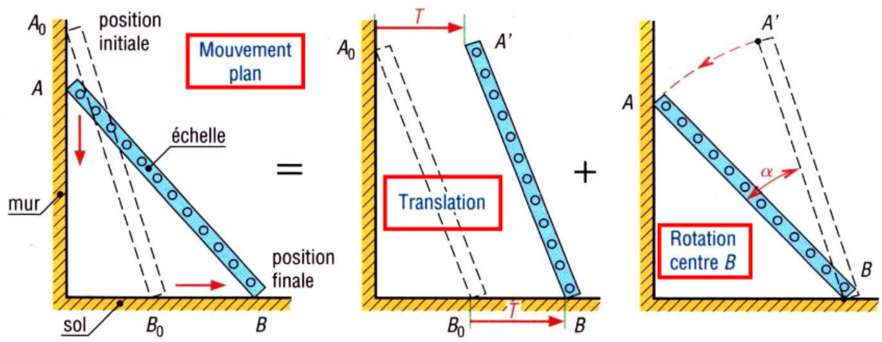
8. Concepts importants de la cinématique (à connaître par coeur)



9. Principaux mouvements d'un solide :

<u>3 types de mouvements :</u>

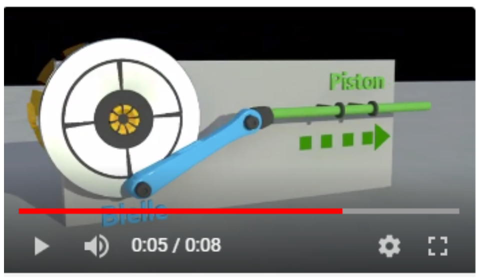
Translation	Rotation	Mouvement Plan
○ Rectiligne ○ circulaire ○ curviligne	<u>*Exemples :*</u> • *une voiture dans une courbe.* • *Une hélice d'avion, pales d'hélicoptère* • *une manivelle.*	translation + rotation exemple : pâles de l'hélicoptère par rapport au sol

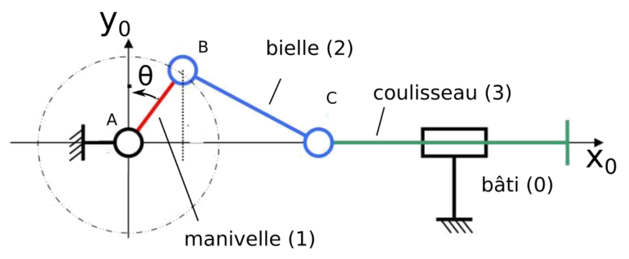


<u>Illustration des trois types de mouvement</u>

Le mécanisme « Bielle-manivelle » est particulièrement intéressant pour caractériser les trois types de mouvement.

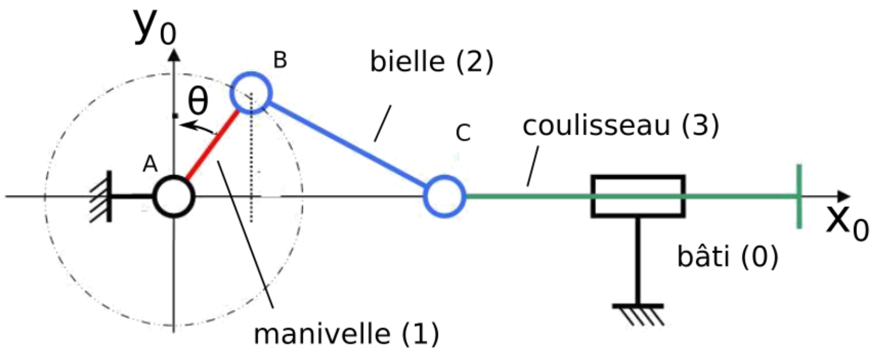
Ce dispositif réalise la transformation du mouvement linéaire alternatif de l'extrémité de la bielle en un mouvement de rotation continu disponible sur la manivelle et vice-versa.



 	**manivelle** → Mvt 1/0 = Rotation $(A,\vec{z}_0)$; Mvt 1/2 = Rotation $(B,\vec{z}_0)$ **coulisseau** → Mvt 3/0 = Translation $(A,\vec{x}_0)$; Mvt 3/2 = Rotation $(C,\vec{z}_0)$ **bielle** → Mvt 2/0 = mouvement plan $(O_0,\vec{y}_{0,}\vec{z}_0)$

Sur le mécanisme suivant, tracer les trajectoires et vitesses suivantes :

$T_{B\in 1/0}$, $T_{B\in 2/0}$, $T_{C\in 3/0}$, $T_{C\in 2/0}$

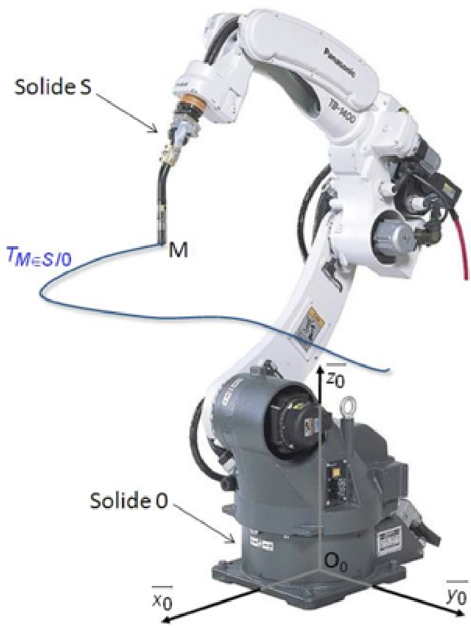


10. Déterminer les positions, vitesses et accélérations d'un solide.

On caractérisera toujours le mouvement d'un solide par rapport à un **repère**. $R(O_{0,}\vec{x}_{0,}\vec{y}_{0,}\vec{z}_0)$ dans le cas qui suit.

1. Trajectoire d'un point M d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0.

La **trajectoire** d'un point M appartenant à un solide S, est le lieu des positions successives occupées par ce point au cours du temps dans le repère R lié au solide de référence.



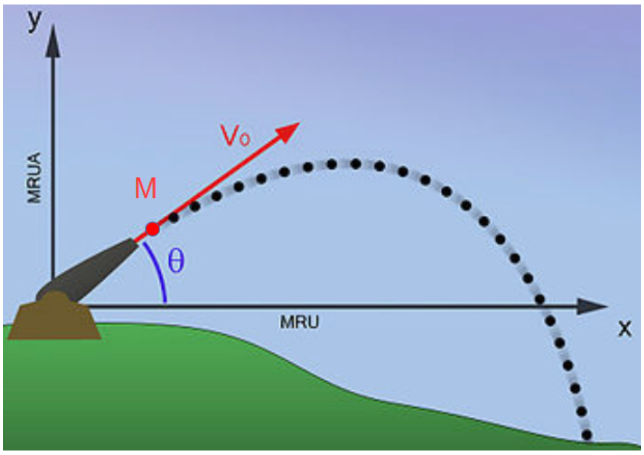
Pour être rigoureux, on parlera de :
- trajectoire d'un point ;
- mouvement d'un solide.

La trajectoire s'obtient à partir des équations horaire (c-à-d en fonction du temps) et en éliminant le temps.

Application : Déterminer l'équation de la $y = f(x)$ trajectoire du point M par rapport au sol (0)

Les composantes du tir parabolique exprimées dans le repère $(R, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ *sont les suivantes*[1] *:*

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \cdot \cos\theta \cdot t \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\theta \cdot t \\ 0 \end{pmatrix}$$



2. Vecteur position d'un point M d'un solide S en mouvement par rapport à R_0.

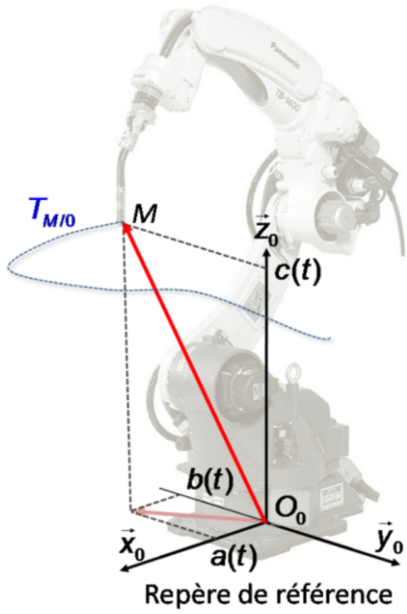
Le **vecteur position** d'un point M appartenant à un solide S est le vecteur qui lie ce point M à l'origine O du repère de référence $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

À la date t :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = a(t)\vec{x} + b(t)\vec{y} + c(t)\vec{z}}$$

<u>Autre écriture possible :</u>

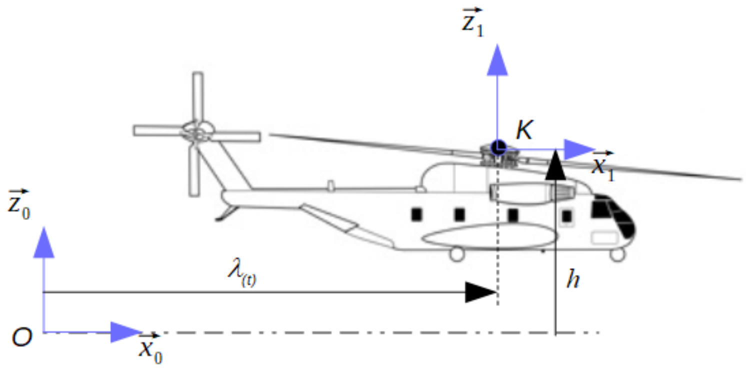
$$\overrightarrow{OM}_{(t)}\begin{pmatrix} a_{(t)} \\ b_{(t)} \\ c_{(t)} \end{pmatrix}$$

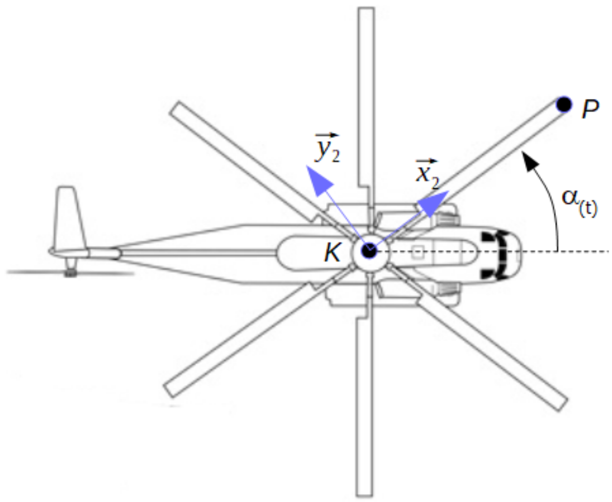


Notation : la trajectoire d'un point appartenant à un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R est notée $T_{M \in S/R}$.

1 Ces équations horaires sont obtenues à partir de la 2ème loi de Newton (=Principe fondamental de la dynamique en ingénierie). Cf. cours de physique.

Application : Déterminer le vecteur position du point P par rapport au sol (0), soit $\overrightarrow{OP}(t)$

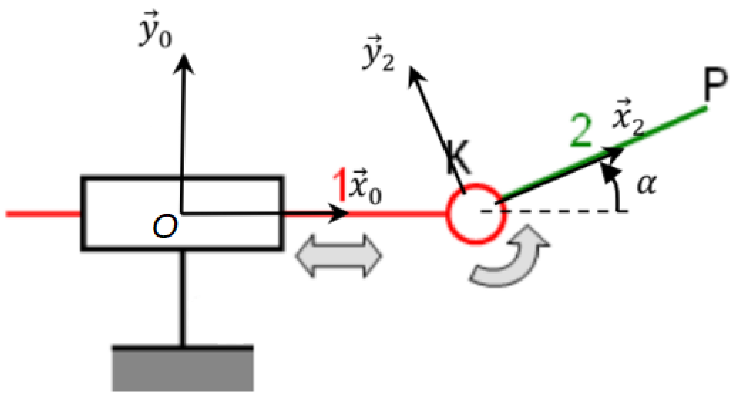




On donne : $\overrightarrow{KP} = R \cdot \vec{x}_2$

La situation précédente peut être modélisée, à des fins de compréhension, par le modèle cinématique suivant :

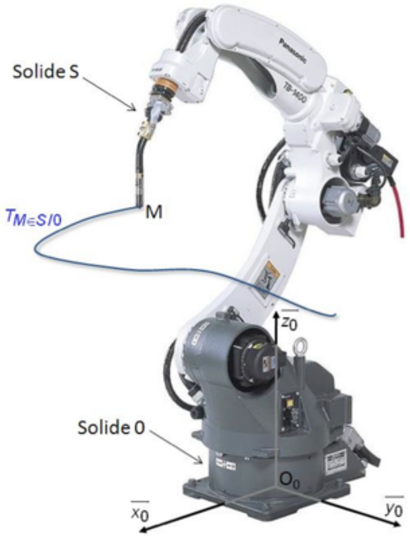
$\overrightarrow{OP}(t) = ?$



***Cf. Cours cinématique – applications élémentaires :** déterminer les vecteurs positions dans chacun des cas.*

3. Vecteur vitesse d'un point M d'un solide S en mouvement par rapport à R_0.

Le **vecteur vitesse**, qui est toujours tangent à la trajectoire, est la dérivée, par rapport au temps, du vecteur position dans le repère de référence.
Le vecteur vitesse du point M appartenant au solide S dans son mouvement par rapport à $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ **est défini par :**



$$\boxed{\overrightarrow{V_{M\in S/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OM_{\in S}}}{dt}\right]_R}$$

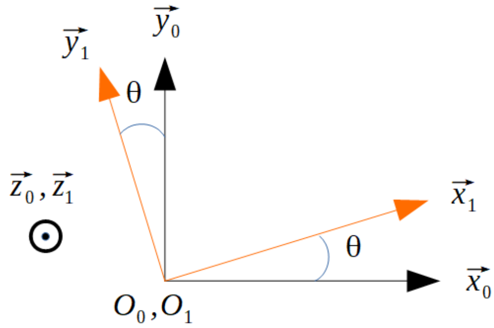
R est le repère de **dérivation**, mais le vecteur à dériver **peut** très bien être **exprimé dans une autre base** que celle du repère R.

Par dérivation on obtient les composantes du vecteur vitesse :

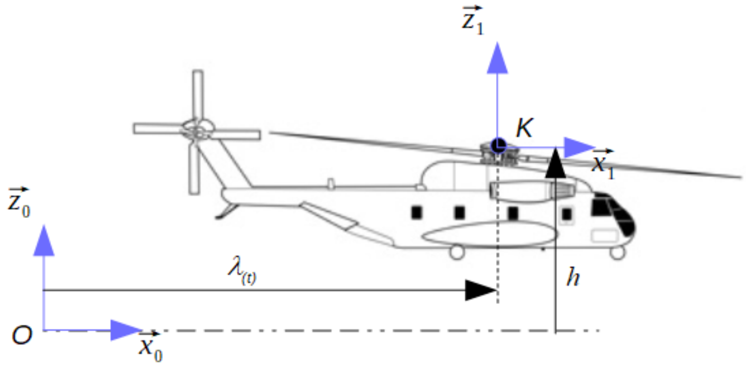
$$\overrightarrow{V_{M\in S/R}} = V_x \cdot\vec{x} + V_y \cdot\vec{y} + V_z \cdot\vec{z} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{V_{M\in S/R}} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

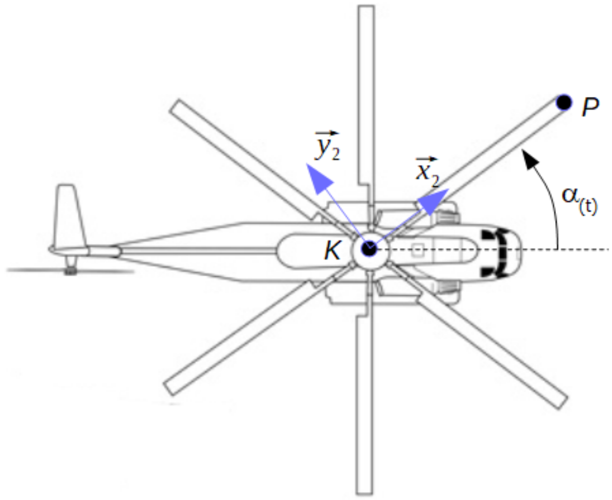
De plus, nous aurons : $$\overrightarrow{V_{M\in S/R}} = -\overrightarrow{V_{M\in R/S}}$$

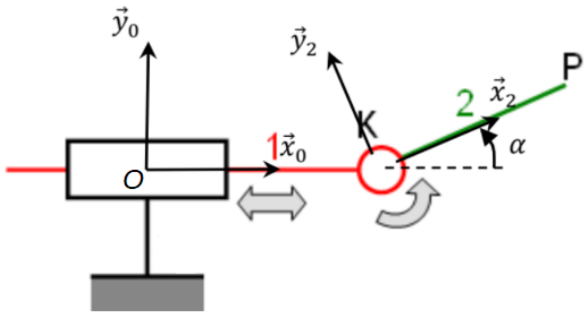
Point important à maitriser : La dérivation vectorielle (dérivation d'un vecteur unitaire pour nous) :

Cas des vecteurs fixes dans la base	
$\left.\frac{d\vec{x}_0}{dt}\right\|_{/R_0} = \left.\frac{d\vec{y}_0}{dt}\right\|_{/R_0} = \vec{0}$	
Cas des vecteurs en rotation par rapport à une autre base (ici R_0)	
$\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right\|_{/R_0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}\cdot\vec{y}_1$ $\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right\|_{/R_0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\theta}\cdot\vec{x}_1$	**Figure plane** (incontournable pour dérivation vectorielle)  $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}\cdot\vec{z}_0 = \dot{\theta}\cdot\vec{z}_1$

Application : Déterminer le vecteur vitesse du point P par rapport au sol (0) ainsi que sa norme et vérifer l’adéquation avec le cahier des charges.







Cf. Cours cinématique – applications élémentaires : *déterminer les vecteurs vitesses dans chacun des cas, par dérivations vectorielles.*

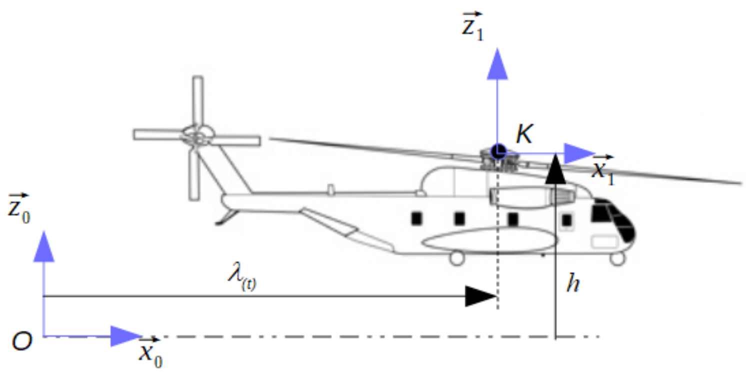
4. Vecteur accélération d'un point M appartenant à un solide S en mouvement par rapport à R.

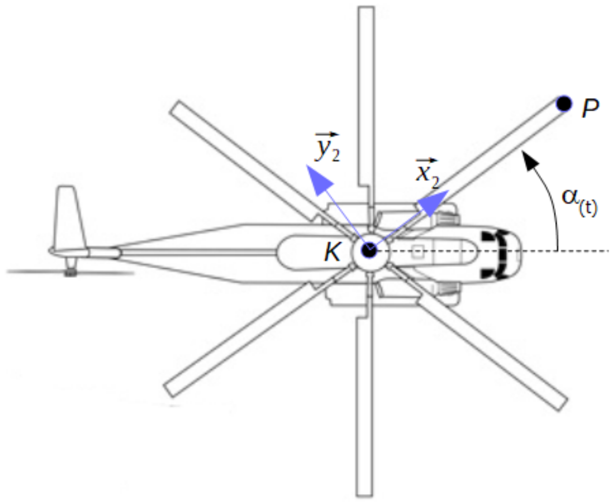
Le **vecteur accélération** $\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}$ est la dérivée, par rapport au temps, du vecteur vitesse dans le repère de référence.

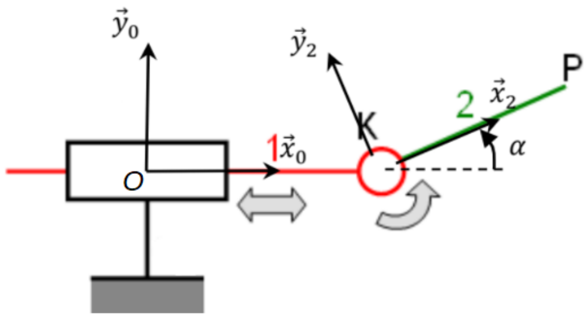
Le vecteur accélération du point M appartenant au solide S dans son mouvement par rapport à R est, à la date t :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{M\in S/R}}}{dt}\right]_R}$$

Application : Déterminer le vecteur accélération du point P par rapport au sol (0)



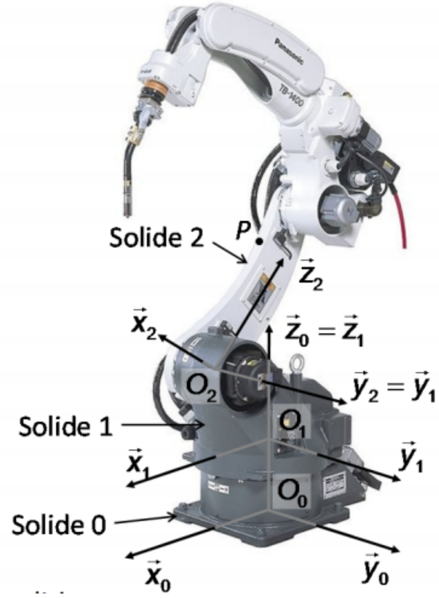




Cf. Cours cinématique – applications élémentaires : *déterminer les vecteurs accélération dans chacun des cas, par dérivations vectorielles.*

5. Composition des vitesses

Soit un point P en mouvement par rapport à un solide 1 (repère $R(O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ lié , lui-même en mouvement par rapport à un
solide 0 (repère lié R_0).



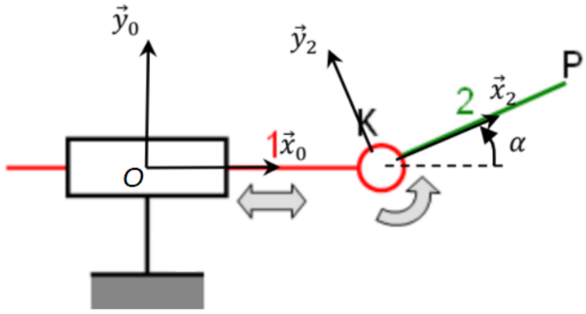
Relation de **composition des vitesses en un même point** : $\vec{V}_{P\in 2/0} = \vec{V}_{P\in 2/1} + \vec{V}_{P\in 1/0}$

Conséquence : $\boxed{\vec{V}_{P\in 2/1} = -\vec{V}_{P\in 1/2}}$

Cette relation de composition des vecteurs vitesse se généralise à n solides :

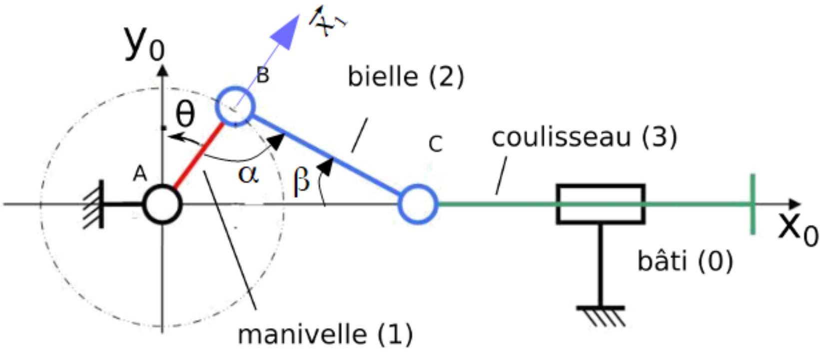
$$\overrightarrow{V}_{P\in n/0} = \overrightarrow{V}_{P\in n/n-1} + \ldots + \overrightarrow{V}_{P\in 1/0}$$

Application : Déterminer le vecteur <u>vitesse</u> du point P par rapport au sol (0) en utilisant la composition des vitesses et la relation de Varignon.



6. Equiprojectivité des vecteurs vitesses

Revenons au mécanisme « Bielle-manivelle ».



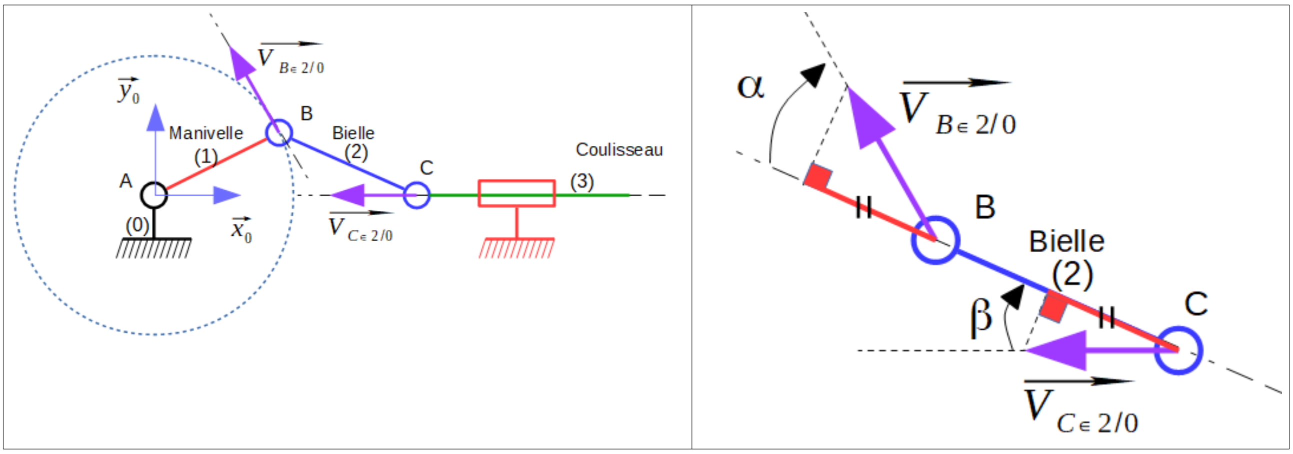
Objectif : déterminer la vitesse du point C par rapport au bâti (0) en fonction de la vitesse de rotation de la manivelle. $V_{C\in 3/0}=f(\dot{\theta})$

Il serait possible d'utiliser les concepts vus précédemment pour y parvenir à condition de connaître $\dot{\alpha}$ *et* $\dot{\beta}$ ce que l'on ne connaît pas. Les trois angles sont liés.

L'objectif s'avère compliqué de cette manière !

Pour y parvenir, nous allons utiliser la propriété d'équiprojectivité des vecteurs vitesses appartenant à un même solide.

Isolons la bielle :



En vertue de la propriété d'équiprojectivité, les deux segment rouge (noté de deux traits obligues) sont de même longueur.
Connaissant $\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}$ (déterminé par la relation de varignon ou par dérivée du vecteur position $\overrightarrow{AB}$), il est donc possible assez simplement de déterminer $\overrightarrow{V_{C\in 2/0}}$.

Propriété d'équiprojectivité :

$$\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{V_{C\in 2/0}}\cdot\overrightarrow{CB}$$

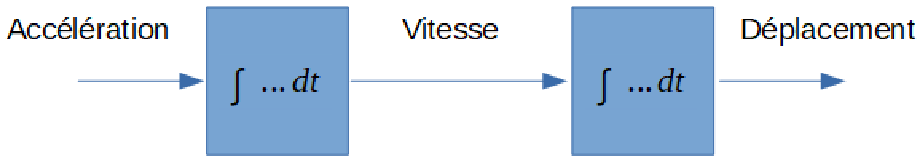
Ce qui revient à écrire

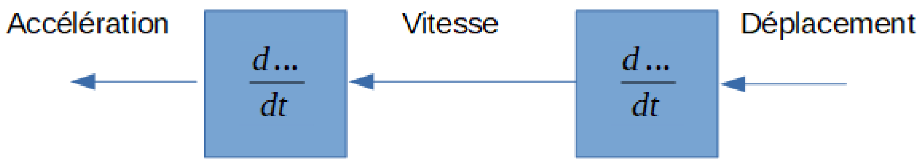
$$\boxed{\|\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}\|\cdot\cos(\alpha)=\|\overrightarrow{V_{C\in 2/0}}\|\cdot\cos(\beta)}$$

11. Lois de commande

Les lois de commande sont les profils d'accélération, de vitesse ou de position imposé aux solides en translation et en rotation.

Tout réside dans le concept vu précédement :



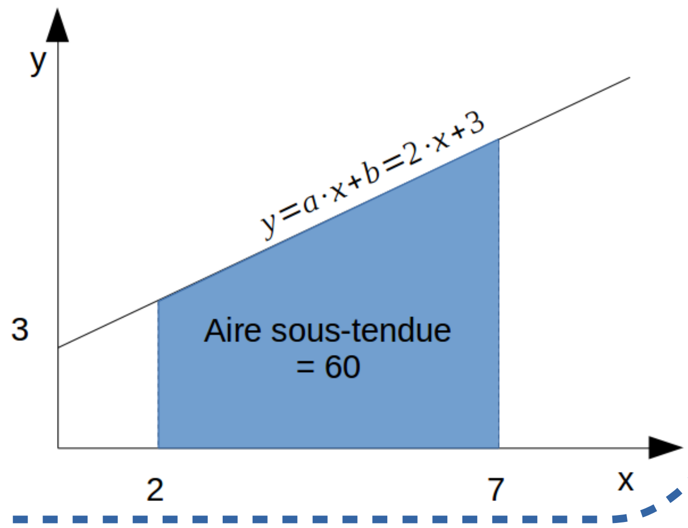


Rappels mathématique :

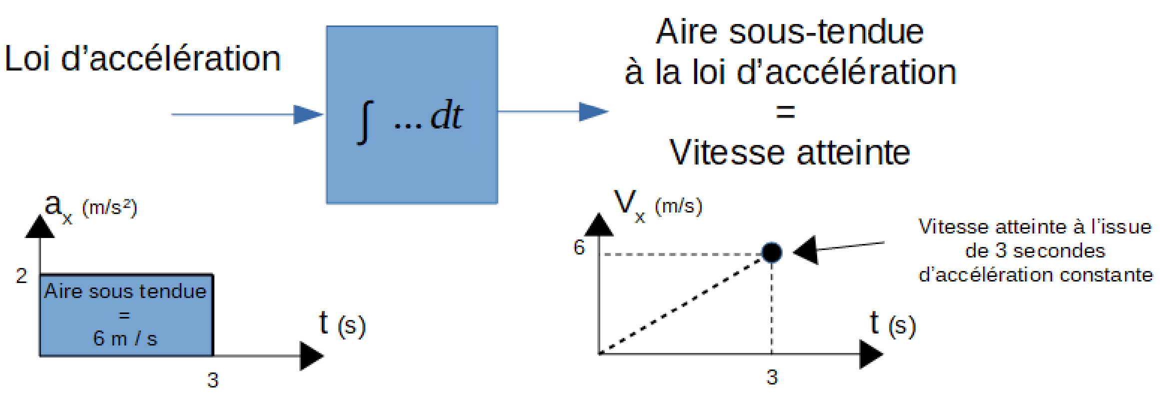
Réaliser l'intégrale d'une fonction correspond à trouver l'aire sous-tendue à la fonction.

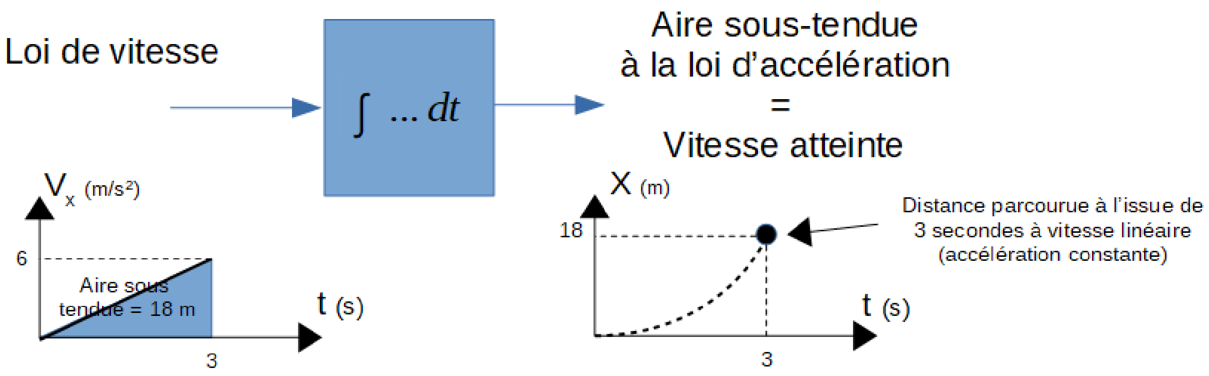
$$y=f(x)$$
$$\int f(x)\cdot dx=F(x)$$
$$\int_a^b f(x)\cdot dx=[F(x)]_b^a=F(x=a)-F(x=b)$$

$$y=f(x)=2\cdot x+3$$
$$\int (2\cdot x+3)dx=x^2+3\cdot x$$
$$\int_2^7 (2\cdot x+3)dx=[x^2+3\cdot x]_2^7=[7^2+3\cdot 7]-[2^2+3\cdot 2]=60$$



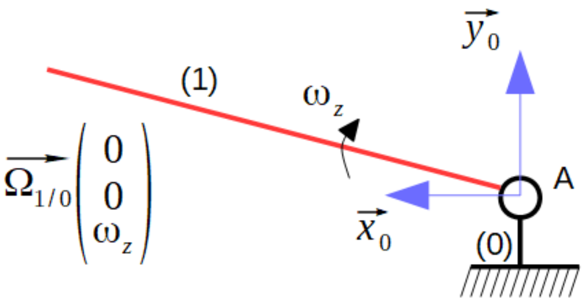
Conséquence en cinématique :

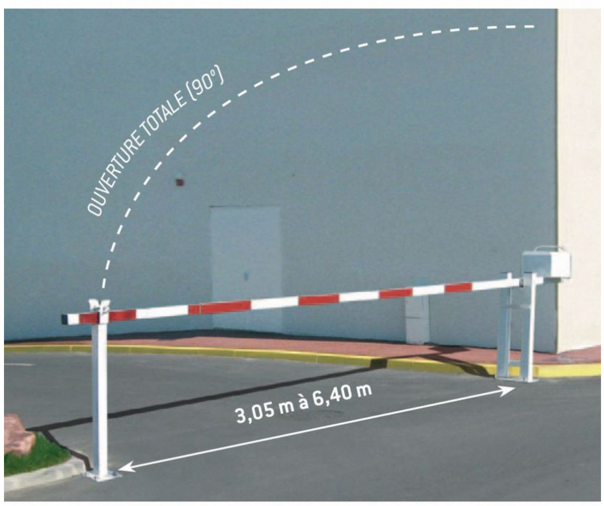




__Exemple avec une barrière levante :__

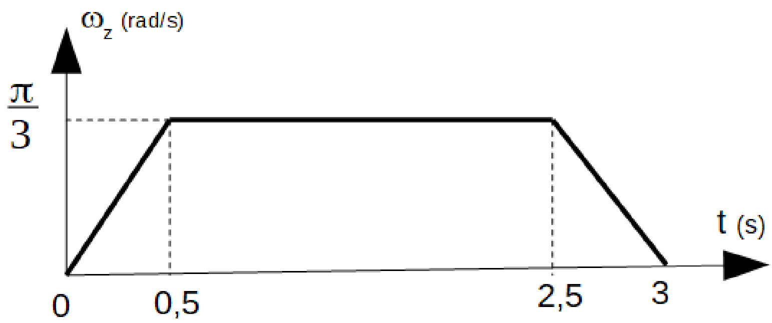
Le modèle cinématique est le suivant :





La barrière suit une loi de vitesse angulaire suivante :

Déterminer l'angle parcouru lors de cette loi de vitesse.



Vous êtes chargé de déterminer la loi de vitesse de l'actionneur (moteur) au point A satisfaisant à un angle d'ouverture de 90°.