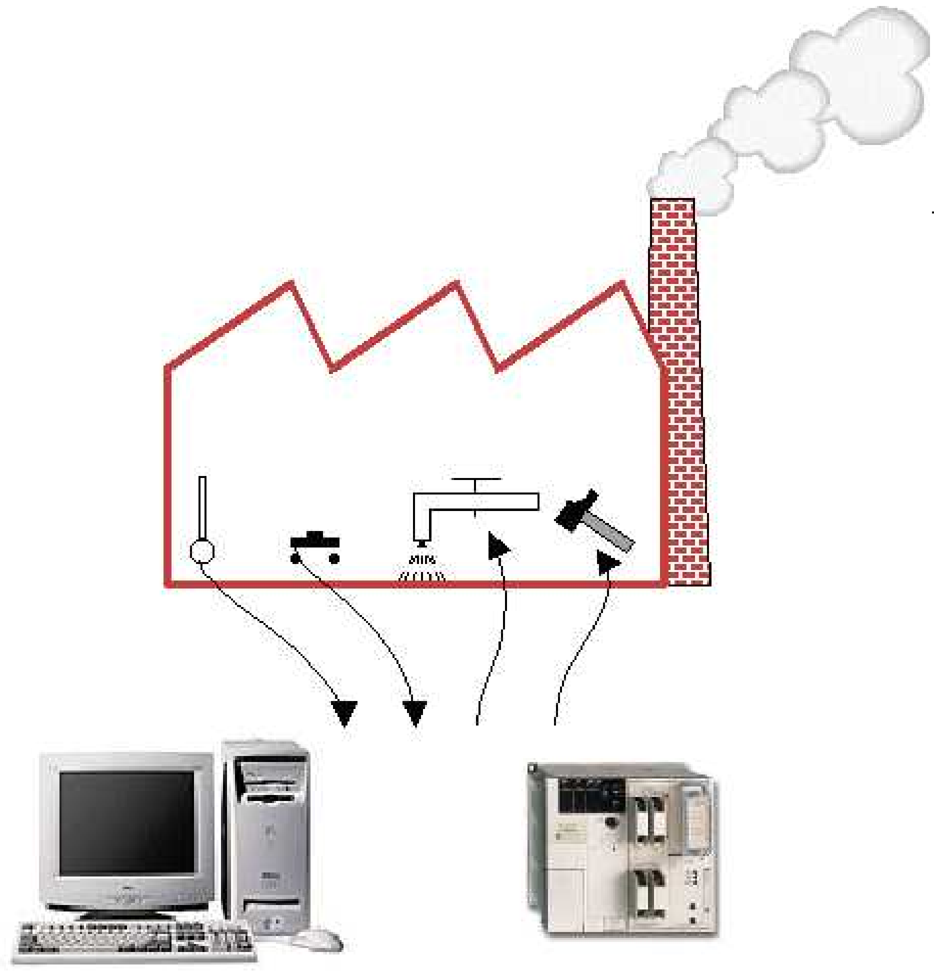
# CAPTEURS - CHAINES DE MESURES



***Pierre BONNET***

# Plan du Cours

## Propriétés générales des capteurs

- Notion de mesure
- Notion de capteur: principes, classes, caractéristiques générales
- Caractéristiques en régime statique
- Caractéristiques en régime dynamique
- Conditionnement et électronique de mesure
- Conversion numérique
- Transport, perturbations, protection, Isolation des signaux

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

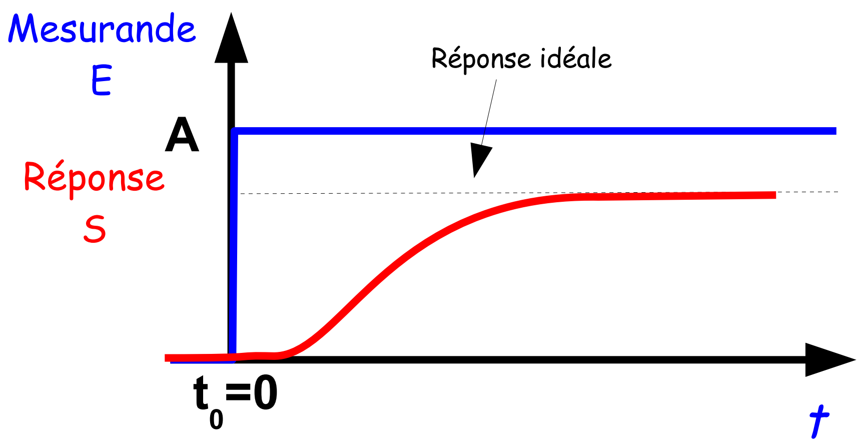
## Réponse dynamique

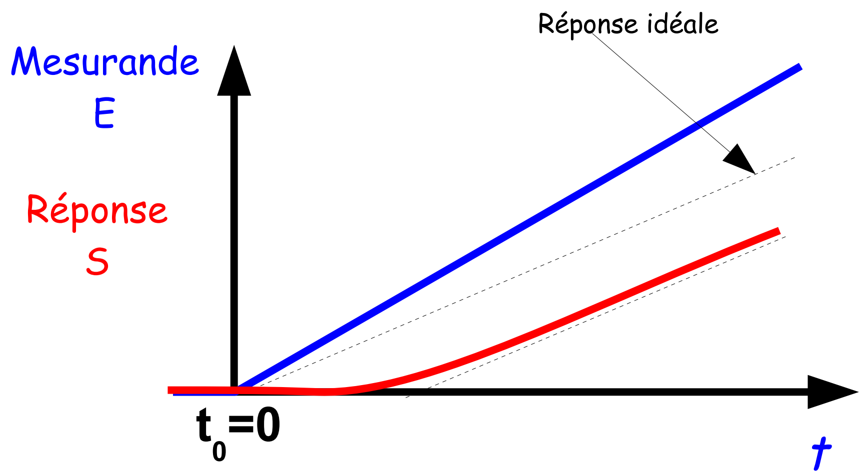
- Variation du mesurande

La réponse temporelle d'un capteur s'évalue pour une variation du mesurande de ***forme donnée***, liée à l'usage typique du capteur :

- en échelon $E(t) = A\,u(t)$

- en rampe $E(t) = a\,t\,u(t)$




⇨ réponse indicielle

⇨ réponse en poursuite

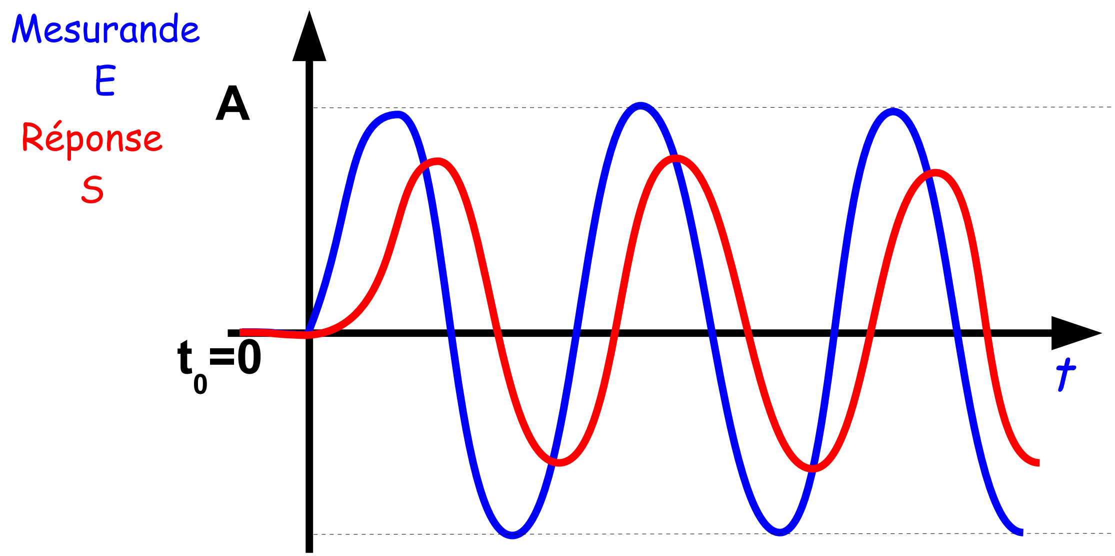
- carré répétitif ⇨ succession d'échelon

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse dynamique

- Variation du mesurande

  - sinusoïde $E(t) = A\sin(\omega t)$




⇨ réponse fréquentielle

- signal périodique ⇨ décomposition du signal en une somme de sinusoïdes

(théorème de Fourier) $$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(k.\omega t + \phi_k)$$

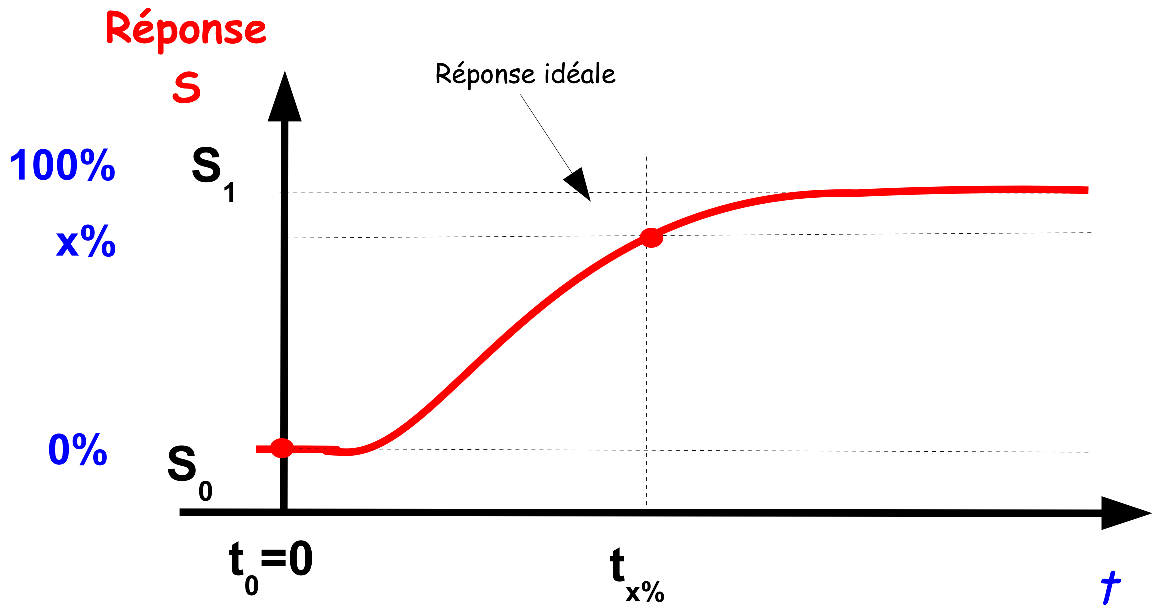
Attention : le principe de superposition ne peut être appliqué que pour un capteur dont la réponse est linéaire pour chacun des ses constituants (corps d'épreuve, capteur, conditionnement...)

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse dynamique

- Temps de réponse

Définition : le temps de réponse à x% d'un capteur soumis à un échelon du mesurande est le temps mis pour passer d'une *valeur initiale* $S_0$ à une valeur de x% de *valeur finale* $S_1$




$$S_{x\%} = S_0 + x_{\%}(S_1 - S_0)$$

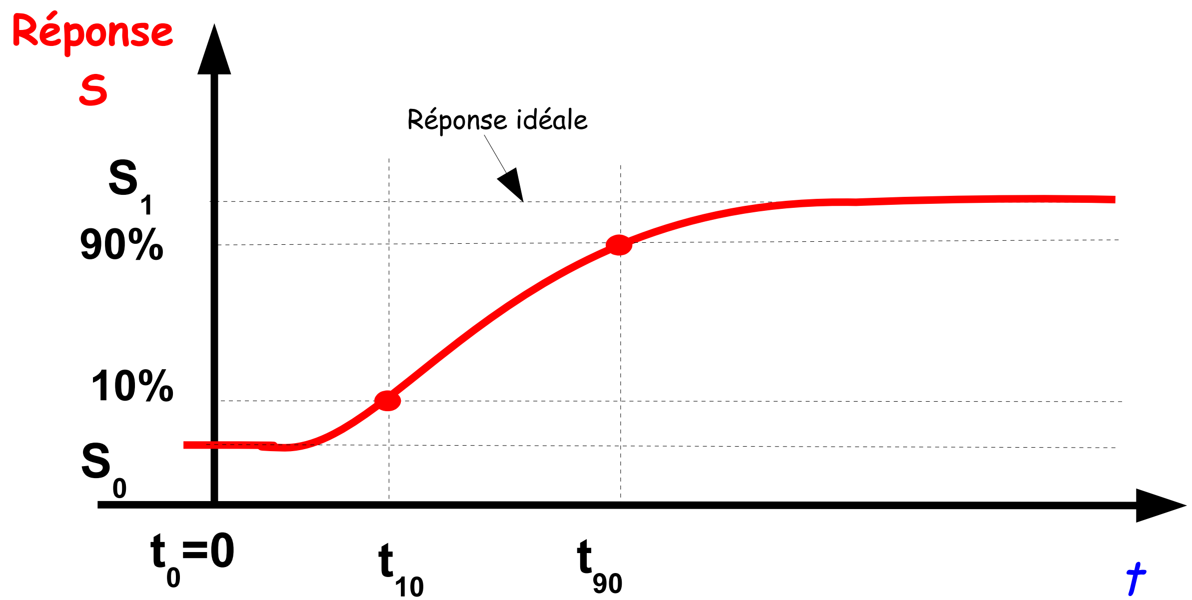
Le temps de réponse permet d'évaluer la temps total de réaction d'un capteur à un échelon de position . C'est un indicateur global.

Le temps de réponse à x% s'évalue par référence à **la courbe de réponse seule**, en tenant compte du décalage initial $S_0$ éventuel

### ● Temps de montée

Définition : le temps de montée d'un capteur soumis à un échelon du mesurande est le temps mis pour passer d'une valeur de $x_1$% de la réponse depuis la valeur initiale $S_0$ à $x_2$% de cette réponse .

Exemple : $t_{10\text{-}90}$




Le temps de montée permet d'évaluer la vitesse de réaction d'un capteur à un échelon de position, indépendamment de la notion de retard pur. C'est un indicateur global.

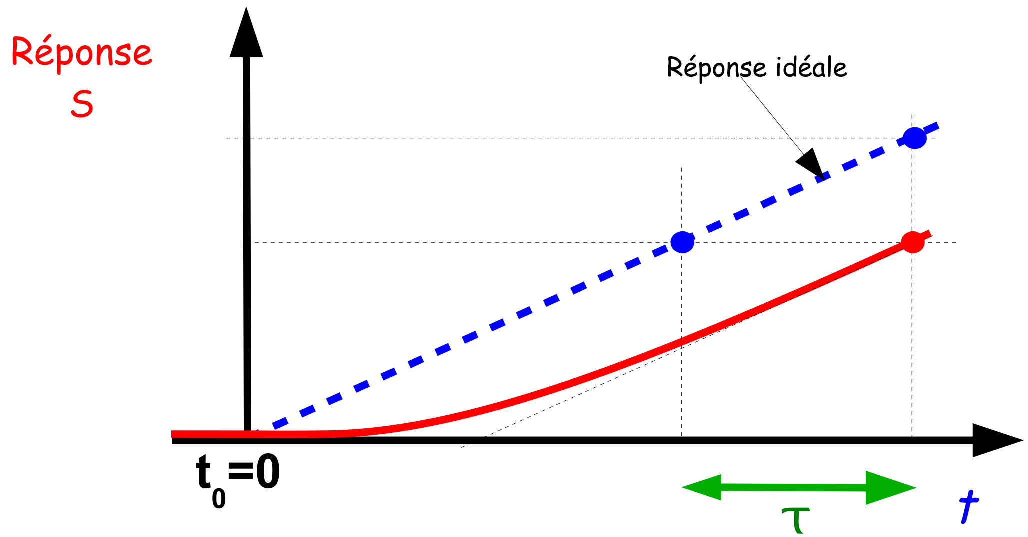
↳ Il permet d'apprécier le comportement du capteur pour une succession d'échelons.

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse dynamique

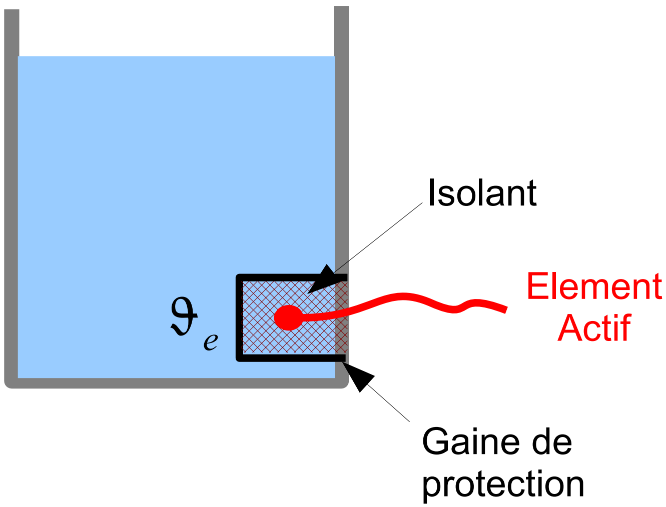
- Traînage

Définition : Le traînage est l'écart de temps entre la réponse à la rampe et la droite idéale caractérisant cette réponse pour atteindre une même valeur de la sortie.



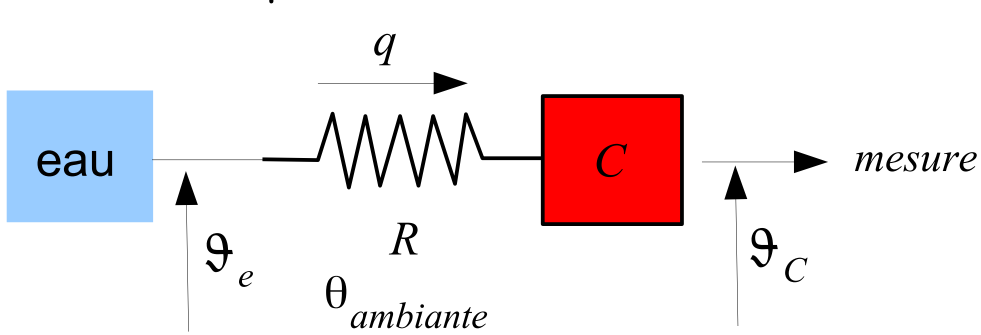

La mesure de l'erreur de traînage est indépendante des caractéristiques de la rampe appliquée pour un système linéaire

- Exemple d'un capteur de température




- La transmission de chaleur se fait par conduction au travers de l'isolant jusqu'à l'élément actif : le milieu de conduction se comporte comme une résistance thermique R.
- L'élément actif représente une masse calorifique $C$ à laquelle la chaleur est transmise.
- Les pertes thermiques par le câblage sont supposées négligeables

Schéma équivalent :



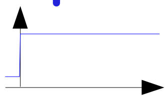

Equations fondamentales :

$$\sum q(t)_{entrant} - q(t)_{sortant} = C\frac{d\theta_c(t)}{dt}$$

$$q(t) = \frac{1}{R}\left(\theta_e(t) - \theta_c(t)\right)$$

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse du 1er ordre à un échelon



- Equation de fonctionnement

Equation de fonctionnement : $$\frac{1}{R}(\theta_e(t) - \theta_c(t)) = C\,\frac{d\,\theta_c(t)}{dt}$$

d'où : $$RC\,\frac{d\,\theta_c(t)}{dt} + \theta_c(t) = \theta_e(t)$$

C'est une équation différentielle du 1er ordre .

En notant $\tau = RC$ , l'équation devient :

$$\tau\,\frac{d\,\theta_c(t)}{dt} + \theta_c(t) = \theta_e(t)$$

- équation caractéristique $\tau\, r + 1 = 0$ de solution $r = -\frac{1}{\tau}$

- solution sans second membre $\theta_{c1}(t) = K\,e^{rt} = K\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

- solution particulière pour une **entrée en échelon** d'amplitude $T_1$ : $\theta_{c2}(t) = T_1\,u(t)$

- solution générale : $$\theta_c(t) = \theta_{c1} + \theta_{c2} = K\,e^{-\frac{t}{\tau}} + T_1$$

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse du 1er ordre à un échelon 

- **Solution de l'équation**

Détermination de la constante $K$ par les conditions initiales : on suppose que le capteur est à la température $T_0$ à l'instant $t = O$

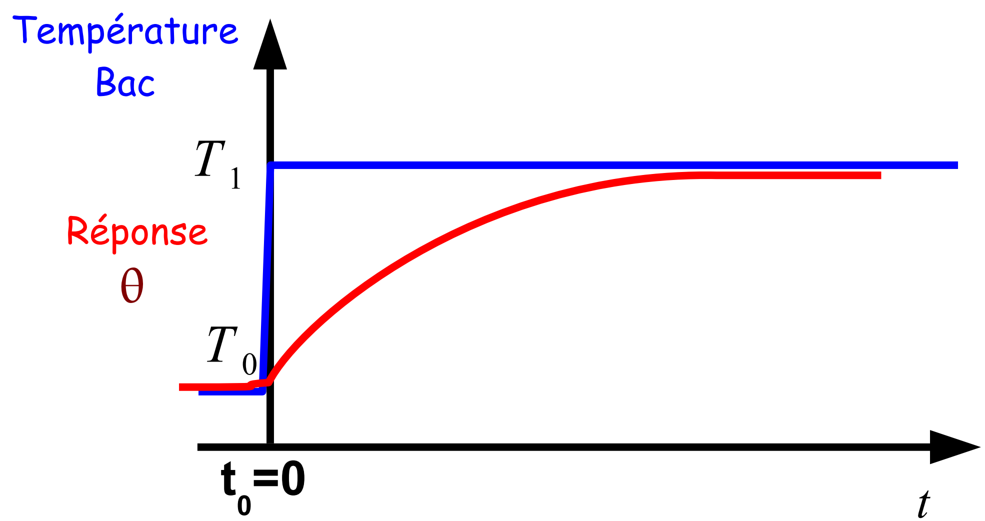
$$\theta_c(0) = K e^0 + T_1 \quad \Rightarrow \quad K = T_0 - T_1$$

la solution générale de la réponse à l'échelon s'écrit donc :

$$\boxed{\theta_c(t) = T_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + T_1(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

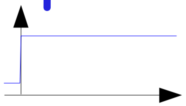
Le premier terme dit "des conditions initiales" décroit exponentiellement

Le deuxième terme tend vers le régime permanent de valeur $T_1$



# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse du 1er ordre à un échelon

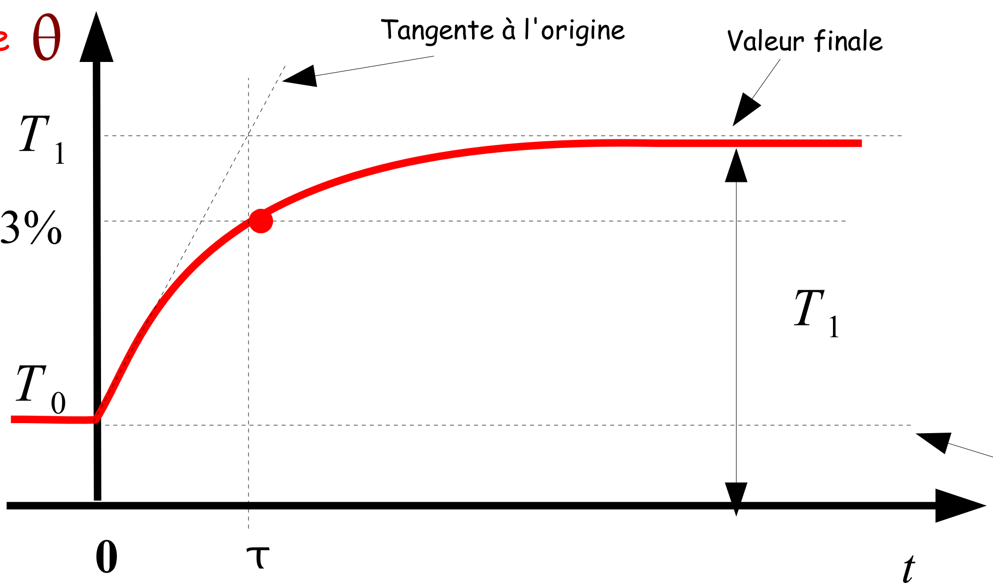


- **Analyse de la solution**

$$\theta_c(t) = T_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + T_1(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

ou encore

$$\boxed{\theta_c(t) = (T_1 - T_0)(1 - e^{-t/\tau}) + T_0}$$

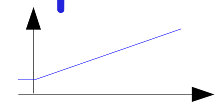



Le temps de réponse à 95% est environ de 3 τ

Le temps de montée est: $t_m = t_{90} - t_{10} = \tau.\ln(9) \approx 2{,}2\tau$

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse du 1er ordre à une rampe



$$\tau \frac{d\theta_c(t)}{dt} + \theta_c(t) = \theta_e(t)$$

- **Résolution de l'équation différentielle**

La rampe a pour équation : $\theta_e(t) = a t + \theta_0$

- solution sans second membre $\theta_{c1}(t) = K e^{\frac{-t}{\tau}}$

- solution particulière pour une entrée en rampe : $\theta_{c2}(t) = \alpha\, t + \beta$

- remplacement dans l'équation diff. : $\tau\alpha + \alpha t + \beta = a\, t + \theta_0$

-par identification, on obtient : $\alpha = a \qquad \beta = \theta_0 - a\tau$

- solution générale : $\theta_c(t) = \theta_{c1} + \theta_{c2} = K e^{\frac{-t}{\tau}} + at + (\theta_0 - a\tau)$

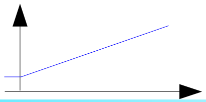
- condition initiale : $\theta_c(0) = \theta_0 = K + \theta_0 - a\tau \quad \Rightarrow \quad K = a\tau$

- solution générale :

$$\theta_c(t) = a\tau\, \mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}} + a(t-\tau) + \theta_0$$

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

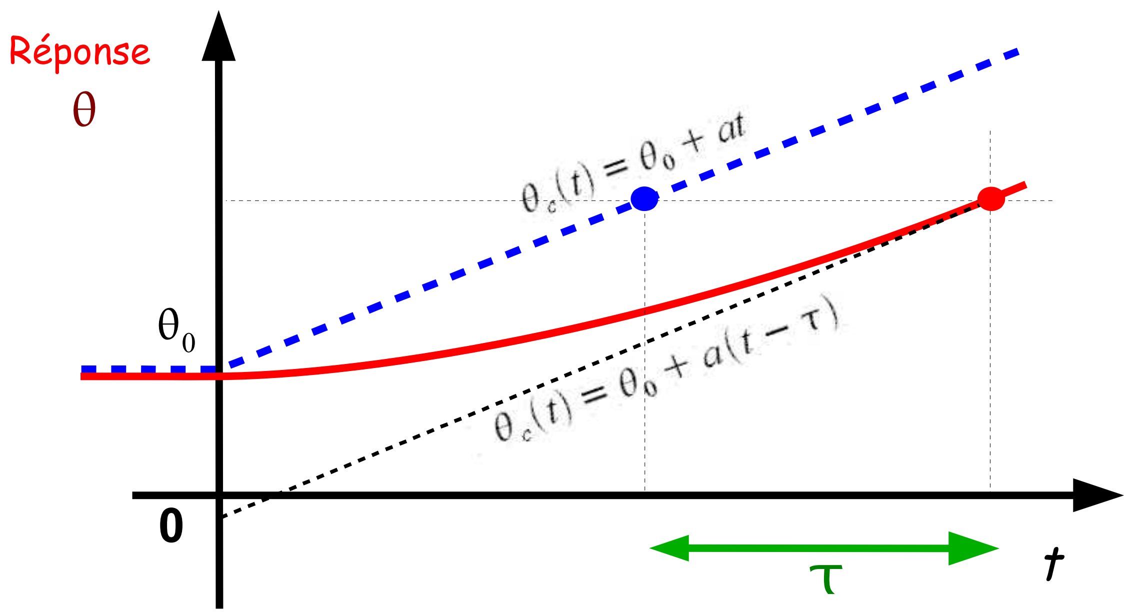
## Réponse du 1er ordre à une rampe



- Analyse de la réponse

La réponse a pour équation :

$$\theta_c(t) = a\tau\, e^{-\frac{t}{\tau}} + a(t-\tau) + \theta_0$$



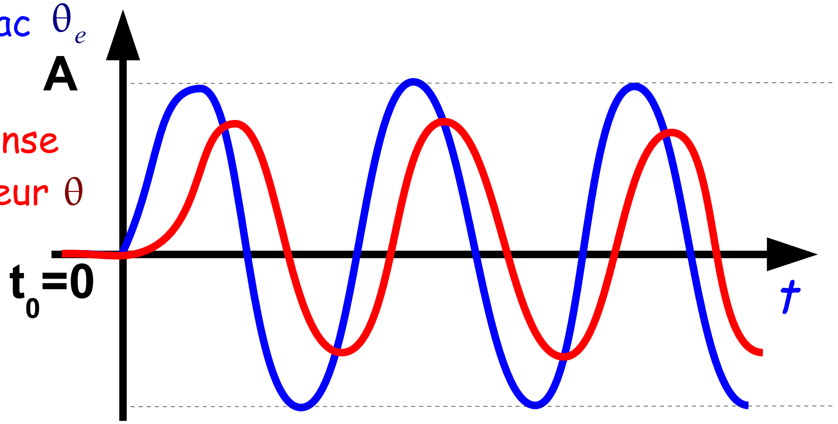

L'erreur de traînage est égale à la constante de temps du système

- Réponse à une entrée sinusoïdale

Le mesurande suit la loi :

$$\theta_e(t) = A\sin(\omega t)$$

$$\tau \frac{d\theta_c(t)}{dt} + \theta_c(t) = \theta_e(t)$$




Cherchons la solution de l'équation différentielle pour

- solution sans second membre : $\theta_{c1}(t) = K_1 e^{rt} = K_1 e^{\frac{-t}{\tau}}$

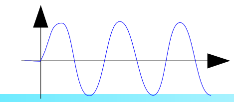
-solution particulière de la forme : $\theta_{c2}(t) = \alpha \sin\omega t + \beta\cos\omega t$

Par substitution dans l'équation différentielle, nous obtenons :

$$\alpha\tau\omega\cos\omega t - \beta\tau\omega\sin\omega t + \alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t = A\sin\omega t$$

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse fréquentielle du 1er ordre



- Réponse à une entrée sinusoïdale

Les coefficients se déterminent par identification : $\begin{aligned} \alpha\omega\tau + \beta &= 0 \\ \alpha - \beta\omega\tau &= A \end{aligned}$

La résolution par Cramer donne : $\alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ A & -\omega\tau \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega\tau & 1 \\ 1 & -\omega\tau \end{vmatrix}} \qquad \beta = \dfrac{\begin{vmatrix} \omega\tau & 0 \\ 1 & A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega\tau & 1 \\ 1 & -\omega\tau \end{vmatrix}}$

soit : $\alpha = \dfrac{A}{1 + \omega^2\tau^2} \qquad \beta = A\dfrac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$

La solution particulière, dite en **régime permanent** est :

$$\theta_{2C} = \frac{A}{1 + \omega^2\tau^2}\left[\sin\omega t + \omega\tau\cos\omega t\right]$$

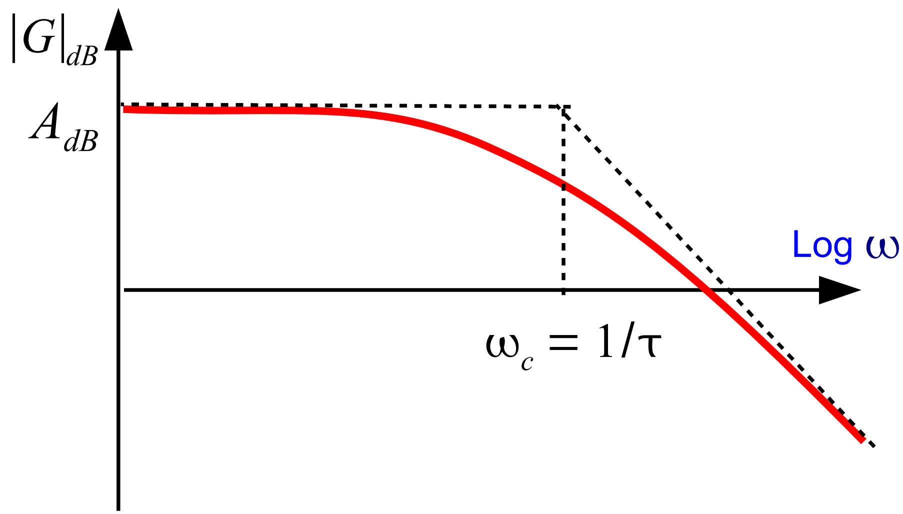
A cette solution, vient de rajouter la solution $\theta_{c1}$ liée aux conditions initiales

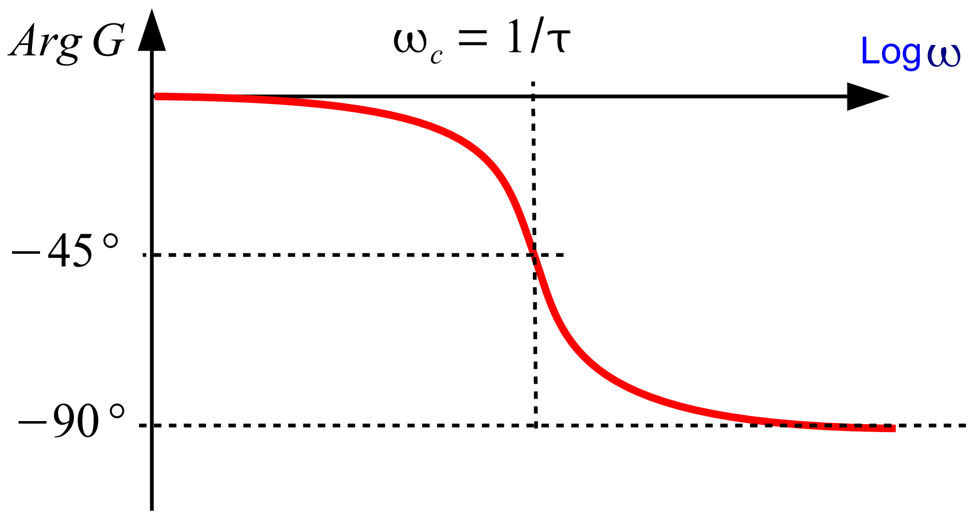
- **Analyse de la réponse à une sinusoïde** $\theta_{2C} = \frac{A}{1+\omega^2\tau^2}[\sin\omega t + \omega\tau\cos\omega t]$

La réponse en régime permanent est sinusoïdale;

Amplitude: $|G| = \frac{A}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$ Déphasage: $Arg\,G = -\tan^{-1}(\tau\omega)$

Représentation graphique : **Lieu de Bode**



# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

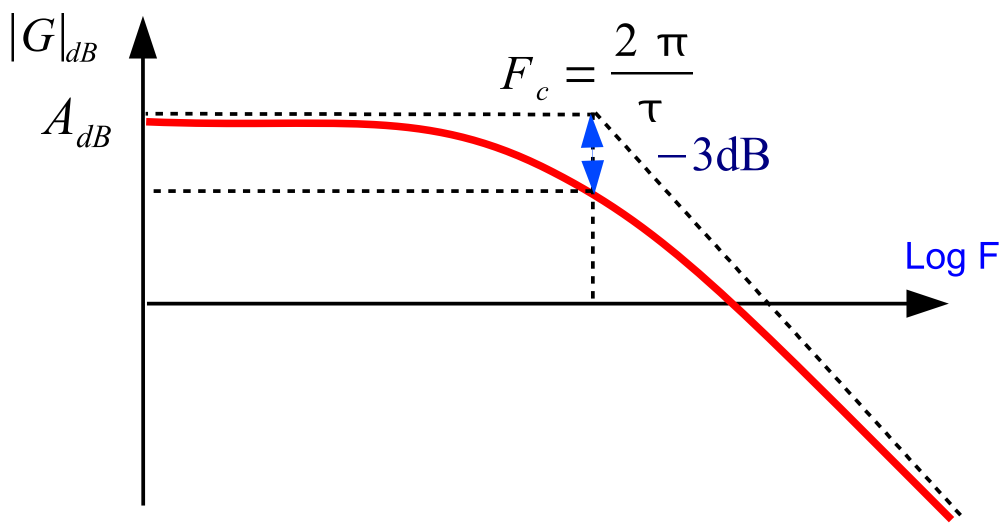
## Réponse fréquentielle du 1er ordre

- **Bande passante d'un capteur**

La bande passante est la valeur de la fréquence pour laquelle $|G| = A/\sqrt{2}$

soit une atténuation de -3dB

Elle représente la limite d'usage d'un capteur dans le domaine fréquentiel .

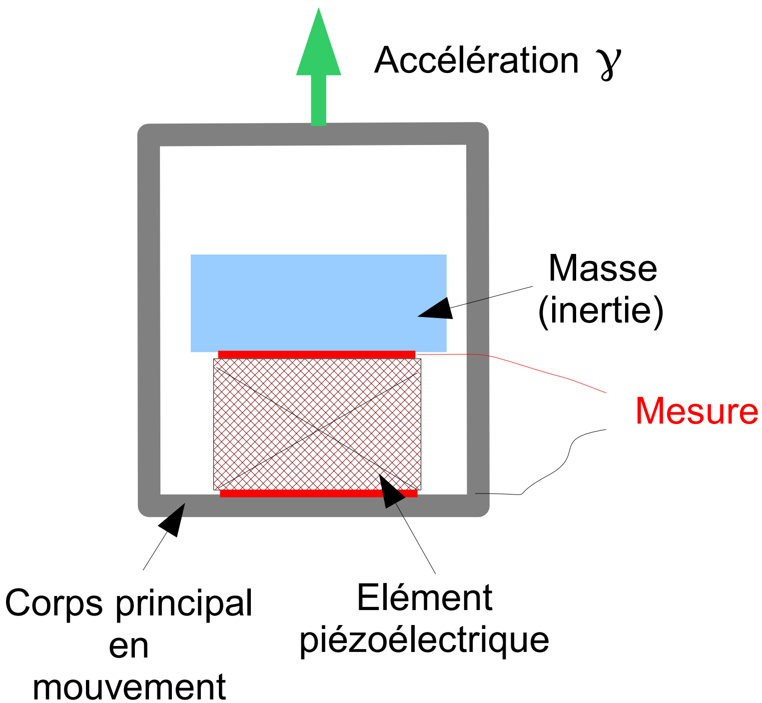



Remarque importante: une atténuation de -3db représente une erreur de 30% par rapport à la valeur nominale .

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse du 2ème ordre

- Exemple d'un capteur d'accélération




L'accéléromètre est constitué d'une masse m et d'un élément piézoélectrique qui fournit le signal électrique (variation de charges).

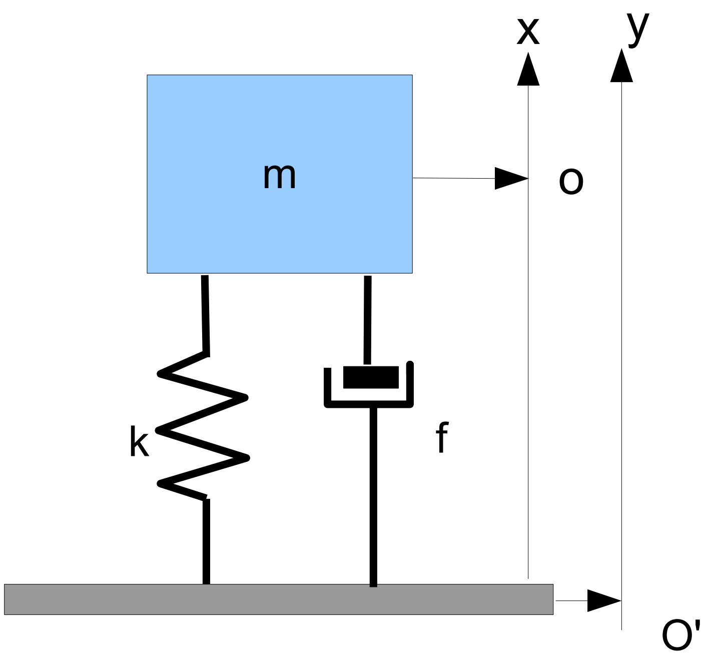
L'élément piézoélectrique a un comportement élastique vis à vis de la force qui lui est appliqué.

Le signal de mesure est lié linéairement à la force de compression (ou de traction) qui s'exerce sur l'élément piézoélectrique.

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse du 2ème ordre

- Exemple d'un capteur d'accélération




Soit $x$ le déplacement de la masse par rapport au corps principal
$y$ le déplacement du corps principal dans le repère absolu

le déplacement de la masse m dans le repère absolu est donc

$$(x + y)$$

Les forces qui s'exercent sur la masse m sont :

-la force de rappel élastique $F_1 = -kx$

- la force de frottement $F_2 = -f\dfrac{dx}{dt}$

L'équation fondamentale de la mécanique appliquée à la masse dans le repère absolu donne:

$$m\frac{d^2(x+y)}{dt^2} = -kx - f\frac{dx}{dt}$$

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse du 2ème ordre

- **Résolution de l'équation différentielle**

L'équation de fonctionnement est donc : $$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = -m\frac{d^2y}{dt^2}$$

C'est une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\frac{\ddot{x}}{\omega_n^2} + 2z\frac{\dot{x}}{\omega_n} + x = e \qquad \text{avec} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{f}{2\sqrt{km}}$$

- solution sans second membre de : $$\frac{\ddot{x}}{\omega_n^2} + 2z\frac{\dot{x}}{\omega_n} + x = 0$$

l'équation caractéristique est : $$\frac{r^2}{\omega^2} + 2z\frac{r}{\omega_n} + 1 = 0$$

qui a pour discriminant : $$\Delta = \frac{4}{\omega_n^2}(z^2 - 1)$$

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse du 2ème ordre

- Résolution de l'équation différentielle (sans second membre)

3 cas se présentent suivant la valeur de z :

- cas **amorti** $z > 1$ : $$x_1(t) = K_1 e^{(-z+\sqrt{z^2-1})\omega_n t} + K_2 e^{(-z-\sqrt{z^2-1})\omega_n t}$$

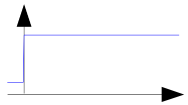
- cas **critique** $z = 1$ : $$x_1(t) = (K_1 + K_2 t) e^{-z\omega_n t}$$

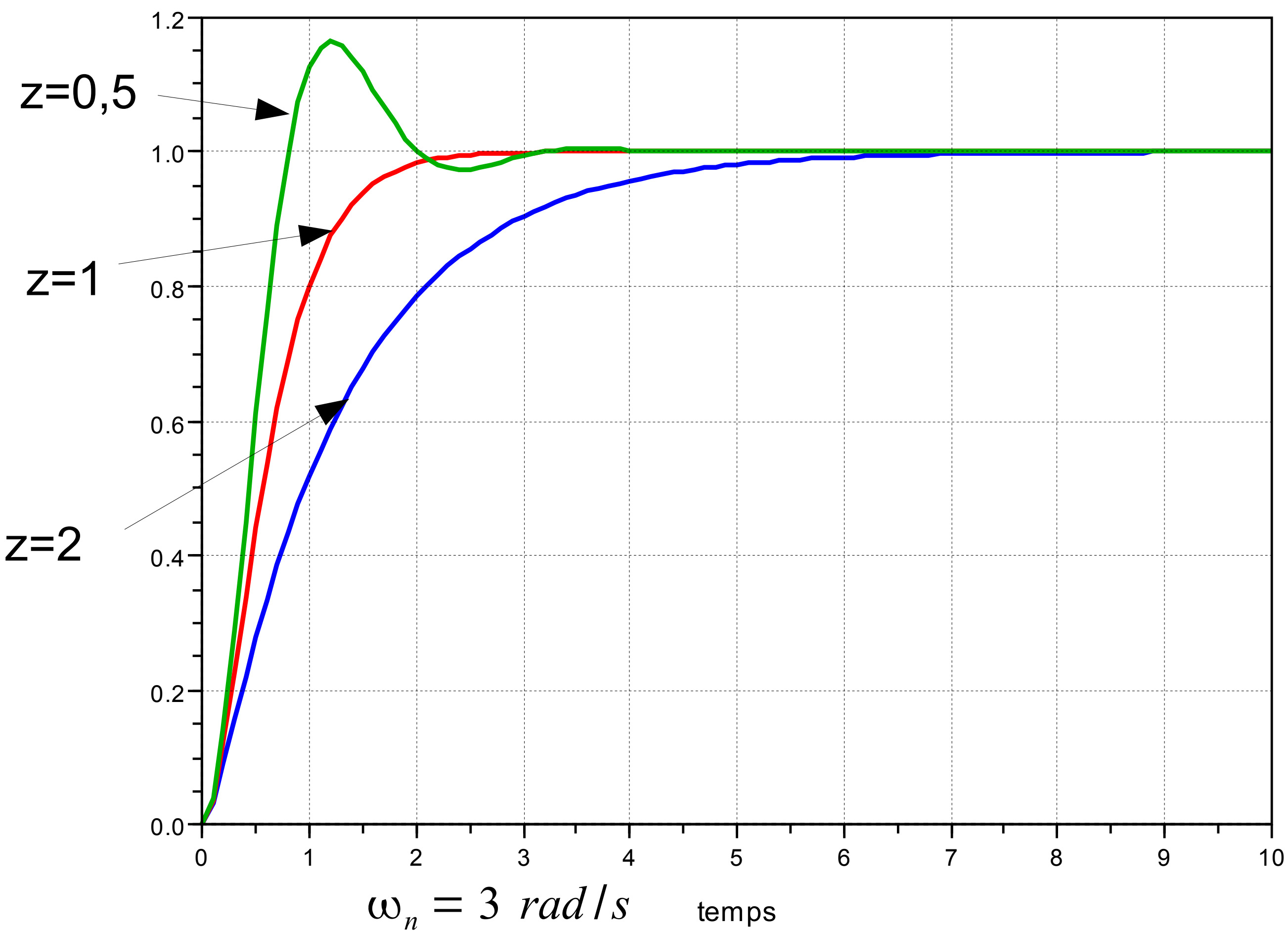
- cas **résonnant** $z < 1$ : $$x_1(t) = K_1 e^{i(\sqrt{1-z^2})\omega_n t} + K_2 e^{-i(\sqrt{1-z^2})\omega_n t} e^{-z\omega_n t}$$

qui se met sous la forme: $$x_1(t) = \left[a\cos(\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t) + b\sin(\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t)\right]e^{-z\omega_n t}$$

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse du 2ème ordre

- Réponse temporelle 




$\omega_n = 3 \ rad/s$

Grandeurs caractéristiques pour $\zeta < 1$

temps de montée

$$t_m = \frac{1}{\omega_N \sqrt{1-\zeta^2}} (\pi - a\cos\zeta)$$

dépassement

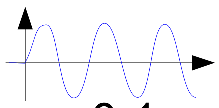
$$D\% = 100\, e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

temps de réponse à n %

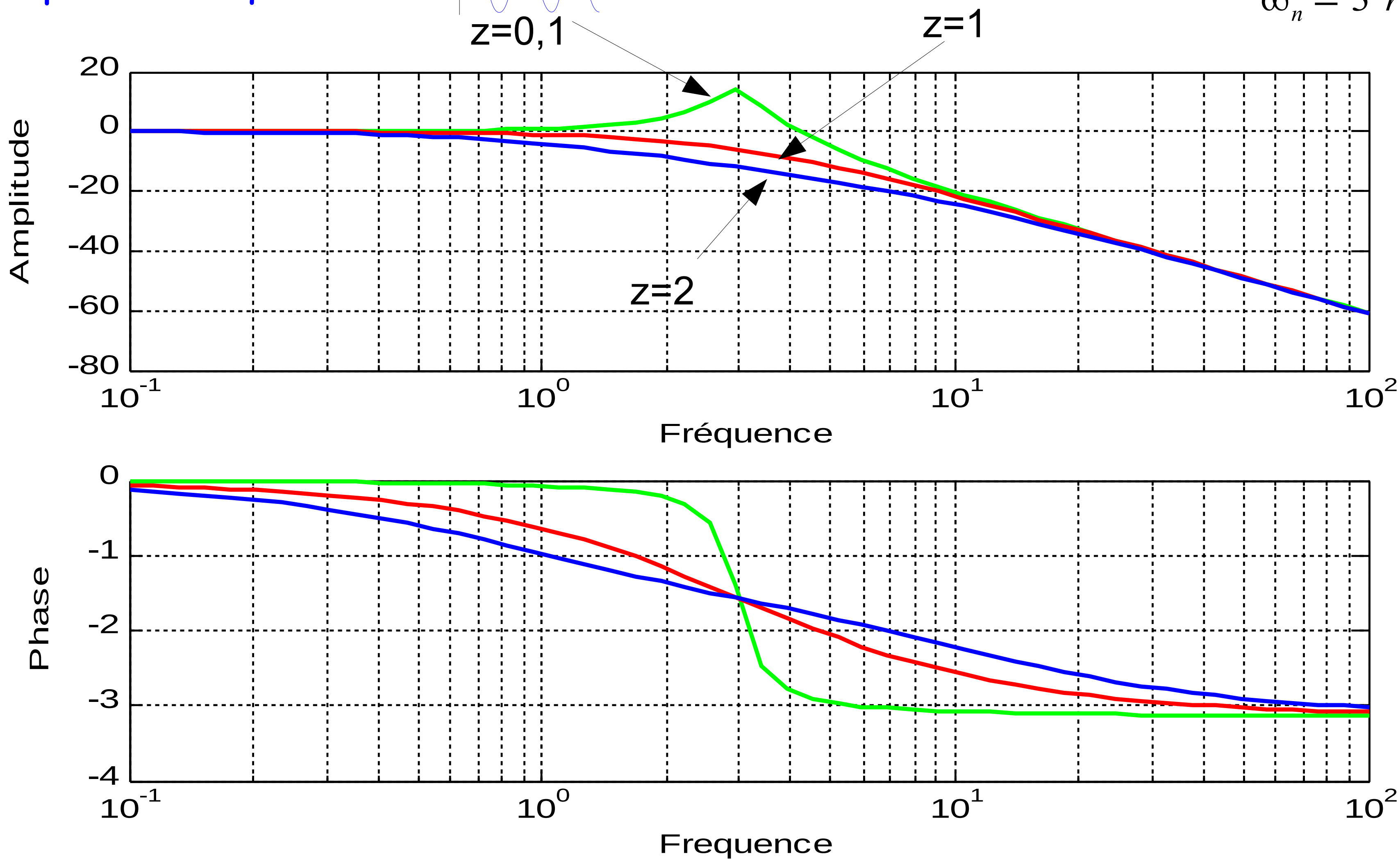
$$tr \approx \frac{1}{\omega_N \zeta} \ln\left(\frac{100}{n}\right)$$

# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse du 2ème ordre

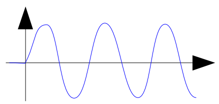
- Réponse fréquentielle 

$$\omega_n = 3\ rad/s$$



# Caractéristiques dynamiques des Capteurs

## Réponse du 2ème ordre

- Réponse fréquentielle 

Grandeurs caractéristiques pour $\zeta < 1$

pulsation de résonance

$$\omega_r = \omega_N \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

pulsation de coupure à -3dB

$$\omega_c = \omega_N \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{1 + (1 - 2\zeta^2)^2}}$$

facteur de résonance

$$M_{dB} = 20 \log \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Université Lille1 Sciences et Technologies