Document élève

Cours :

Evolution des grandeurs effort et flux

Principe fondamental de la dynamique

Bac SI

Mise en situation :

L’objectif du cours est d’être capable à partir d’efforts (Forces, Moments de forces ou Couples) de déterminer les accélérations auxquelles les solides sont soumis. Connaissant les accélérations, il est ainsi possible à partir de compétences de cinématiques de déterminer les vitesses et les positions atteintes.

<u>Exemples traités en physique :</u>
Chute libre d’une balle
Tire parabolique

<u>Exemples traités en ingénierie :</u>
Mise en mouvement d’un solide en translation rectiligne.
Mise en mouvement d’un solide en rotation pure.

Théorèmes

Dans le domaine de la mécanique, le <u>principe fondamental de la dynamique (PFD)</u> correspond à la <u>seconde loi de Newton.</u>

Il se décline en deux théorèmes (l’un en translation, l’autre en rotation).

Principe fondamental de la dynamique
(Seconde loi de Newton)

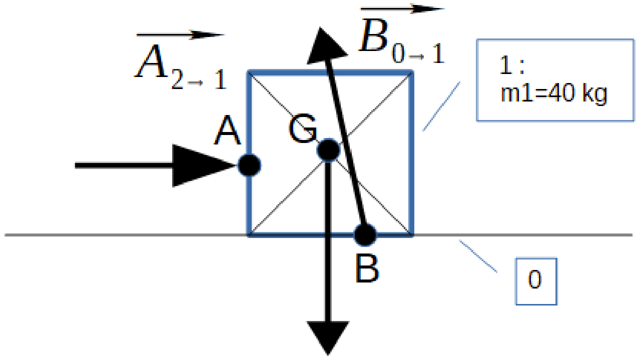
- Théorème de la **Résultante** dynamique
  (En translation)
- Théorème du **Moment** dynamique
  (En rotation)

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$$

$$\overrightarrow{\sum M_{O(\overrightarrow{F_{ext}})}} + \overrightarrow{\sum C_{ext}} = [I_O(S)] \cdot \frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}$$

En translation :

Théorème de la Résultante dynamique (Écriture **Vectorielle**)

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m \cdot \frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$$	F : force en Newton m : masse en kg V_G : vitesse du centre de gravité G en $m.s^{-1}$ a_G : accélération au centre de gravité G en $m.s^{-2}$
Illustration	
A partir du <u>théorème de la résultatnte dynamique</u> (TRD), connaissant le bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) sur l'objet 1, il est aisé de déterminer la force $\overrightarrow{A_{2\to1}}$ pour obtenir une accélération linéaire de l'objet 1 imposée par un cahier des charges ou toujours à partir du BAME de déterminer l'accélération linéaire de l'objet 1 si toutes les forces sont connues.	

En rotation :

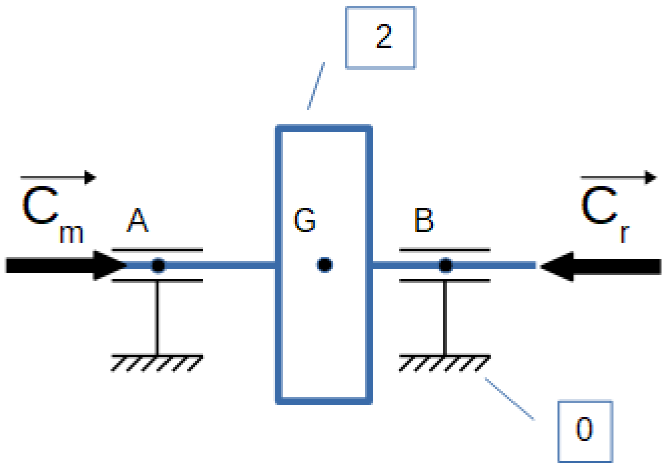
Théorème du Moment dynamique

Cas général (Ecriture vectorielle)
(Non exigée en pré-bac Sciences de l'ingénieur)

$\overrightarrow{\sum M_{O(\vec{F}_{ext})}}+\overrightarrow{\sum C_{ext}}=[I_O(S)]\cdot\frac{d\vec{\Omega}}{dt}$ Avec $\vec{\Omega}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$	$\vec{C}$: couple en N.m $\vec{M}$: moment en N.m $[I_O(S)]$: matrice des moments d'inertie en kg.m² $\vec{\Omega}$: vecteur vitesse de rotation en rad.s^{-1}

Illustration

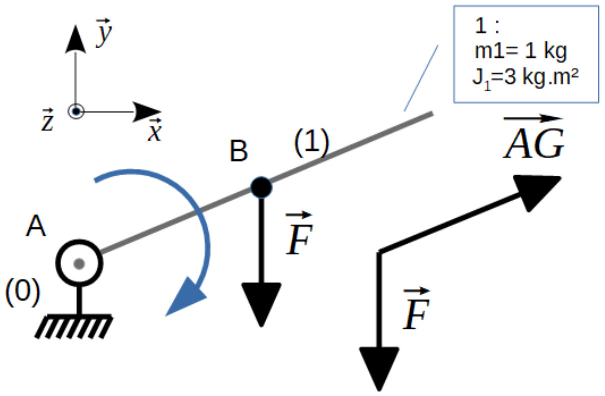
A partir du <u>théorème du moment dynamique</u> (TMD), connaissant le bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) sur l'objet 2, il est aisé de déterminer le couple $\vec{C}_m$ pour obtenir une accélération angulaire de l'objet 1 imposée par un cahier des charges ou toujours à partir du BAME de déterminer l'accélération angulaire de l'objet 1 si toutes les couples et moments de forces sont connus.



<u>Qu'est ce que</u> $\overrightarrow{\sum M_{O(\overrightarrow{F_{ext}})}}$?

Il s'agit de la somme des moments qui ont pour effet de mettre en rotation un objet.

Prenons un exemple pour une seule force créeant un moment :



La pièce 1 est en liaison pivot avec la pièce 0.
La pièce 1 a naturellement tendance à tourner dans le sens horaire (cf.flèche courbe) selon $-\vec{z}$

C'est le Moment de la force F exprimé au point A ($\overrightarrow{M_A(\overrightarrow{F_{ext}})}$) qui tend à la faire tourner la pièce 1.

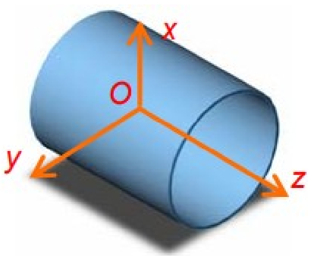
<u>Pour calculer le moment du poids P, il suffit d'appliquer la formule du moment suivante :</u>

$$\overrightarrow{M_A(\vec{F})} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$$

<u>Remarque importante</u> *: un moment est toujours exprimé en un point car le moment est variant (différent selon le point considéré).*

<u>Qu'est ce que</u> $[I_O(S)]$?

Il s'agit de la matrice d'inertie du solide S pris au point O.



cylindre creux : rayon *R* et longueur *l*

<u>Matrice exprimée au point O</u>

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2+\frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2+\frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$$

Moment d'inertie si rotation selon l'axe x J_{Ox}

Moment d'inertie si rotation selon l'axe y J_{Oy}

Moment d'inertie si rotation selon l'axe z J_{Oz}

$$\begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{2}mR^2+\frac{1}{12}ml^2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}mR^2+\frac{1}{12}ml^2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{mR^2} \end{pmatrix}$$

Exemple pour une cylindre creux

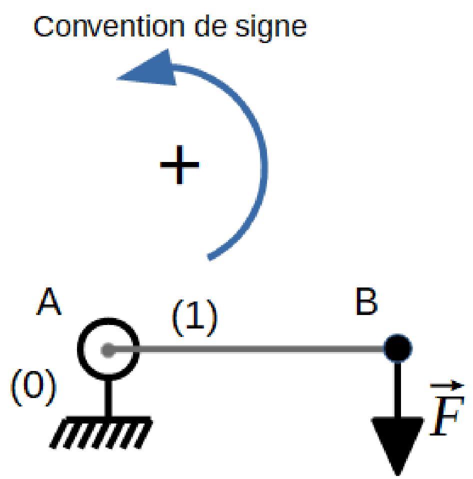
Cas particulier[1] (Ecriture **scalaire**)
La formule exigée en pré-bac Sciences de l’ingénieur est la suivante :

$\sum M_{G(\vec{F}_{ext})} + \sum C_{ext} = J_G \cdot \frac{d\omega}{dt}$	C : couple en N.m M : moment en N.m J : moment d’inertie en kg.m² ω : vitesse de rotation en rad.s^{-1}

Pour le pré-bac seule cette formule est exigée et la rotation du solide ne se fera que sur l’axe passant par le centre de gravité du solide.

<u>Mais comment fait-on pour les moments alors ? :</u>

Il faut utiliser une convention de signe pour les moments.



Le $M_A(\vec{F})$ sera compté positivement si le moment a tendance à faire tourner le mécanisme dans le sens de la convention de signe et négativement dans le cas contraire.

Dans le cas de la figure ci-contre, le $M_A(\vec{F})$ serait compté négativement pour faire un bilan des moments.

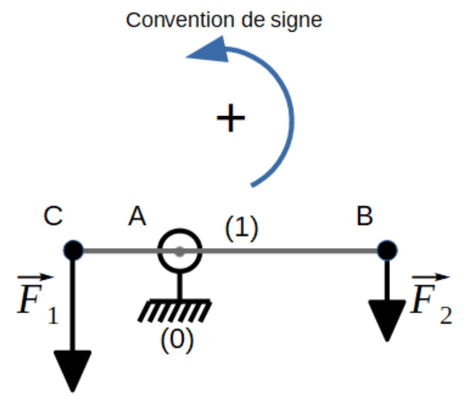
Pour calculer le moment d’une force, il suffit d’appliquer la formule du moment suivante :

$$M_A(\vec{F}) = [AB] \cdot \|\vec{F}\|$$

<u>Attention</u> : cette formule est valable uniquement si [AB] est perpendiculaire à la force F.

1 Le théroème du moment dynamique sera uniquement utilisé (référentiel des sciences de l’ingénieur) pour un solide en rotation autour d’un axe fixe dont le centre de gravité G est sur l’axe de rotation.

Cas particulier (le bras de levier est perpendiculaire aux forces)



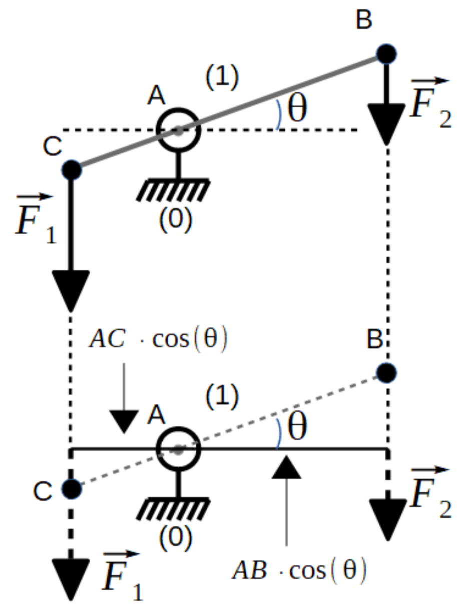
Le $M_A(\vec{F}_1)$ sera compté positivement car il a tendance à faire tourner le mécanisme dans le sens de la convention de signe.
Le $M_A(\vec{F}_2)$ sera compté négativement car il a tendance à faire tourner le mécanisme dans le sens opposé à la convention de signe.

Le moment résultant $M_A(\vec{F}_{ext})$ s'écrit de la manière suivante :

$$\sum M_A(\vec{F}_{ext}) = +M_A(\vec{F}_1) - M_A(\vec{F}_2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_{ext}) = +[AC] \cdot \vec{F}_1 - [AB] \cdot \vec{F}_2$$

Cas général (les bras de leviers ne sont pas perpendiculaires aux forces



Le $M_A(\vec{F}_1)$ sera compté positivement car il a tendance à faire tourner le mécanisme dans le sens de la convention de signe (même convention que précédemment).

Le $M_A(\vec{F}_2)$ sera compté négativement car il a tendance à faire tourner le mécanisme dans le sens opposé à la convention de signe (même convention que précédemment).

Le moment résultant $M_A(\vec{F}_{ext})$ s'écrit de la manière suivante :

$$\sum M_A(\vec{F}_{ext}) = +M_A(\vec{F}_1) - M_A(\vec{F}_2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_{ext}) = +[AC]\cos\theta \cdot \vec{F}_1 - [AB]\cos\theta \cdot \vec{F}_2$$

Dans tout problème de dynamique, les deux premières étapes sont :

- d'isoler le système étudié
- réaliser le B.A.M.E

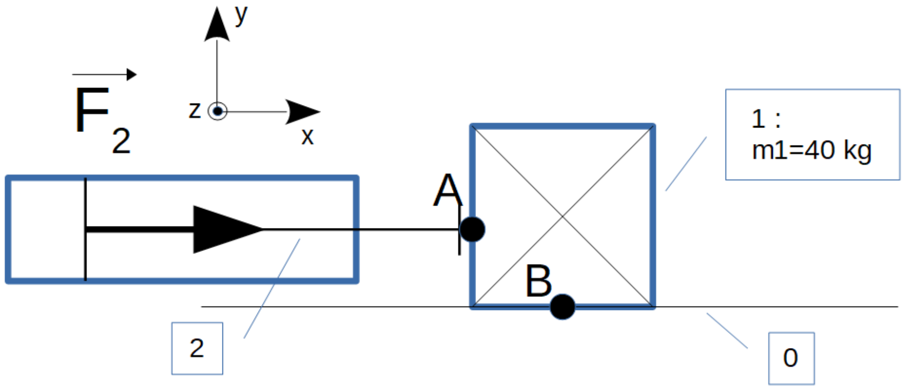
Citons le bilan des actions mécaniques extérieures possibles sur un système isolé :

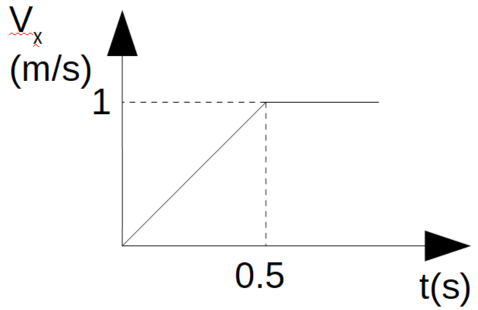
- Actions à distance :
    - poids du système étudié ;
    - poussée d'Archimède (souvent négligée devant le poids sauf dans des fluides autres que l'air, par exemple l'eau).
- Action de contact :
    - Actions mécaniques aux liaisons (encastrement, pivot, glissière, etc) ;
    - Résistance au roulement et au pivotement.
    - Frottement lors d'un glissement (loi de Coulomb).
- Autres efforts :
    - Traînée aérodynamique (négligée sur des calculs analytiques car rend le problème complexe) ;
    - Forces, couples et moments agissant sur le système isolé.

Application 1 (100 % translation)

On souhaite déterminer la force F_2 nécessaire à déplacer la masse m1 selon le profil de vitesse ci-après. On constate que $\vec{F}_2 = \overrightarrow{A_{2\to 1}}$

$\overrightarrow{A_{2\to 1}}$ *se lit Force au point A du solide 2 sur le solide 1.*





Bilan des actions mécaniques extérieures (B.A.M.E)

$\overrightarrow{A_{2\to 1}} \begin{pmatrix} A_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{B_{0\to 1}} \begin{pmatrix} -78 \\ 392 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A_{2\to 1}}$ Action mécanique en A de 2 sur 1
$\overrightarrow{B_{0\to 1}}$ Action mécanique en A de 0 sur 1

La composante B_x représente la **réaction Tangentielle (T)** due au frottement de la pièce (1) sur le support (0),
La composante B_y représente la **réaction Normale (N)** du support (0) sur la pièce (1),

$\vec{P}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 \cdot g \end{pmatrix}$

$\vec{P}_1$ Poids de la pièce 1

Les composantes sont exprimées en Newton

1. **Positionner** les actions mécaniques sur le schéma.

2. **Déterminons** la force $\overrightarrow{A_{2\rightarrow1}}\begin{pmatrix}A_x\\0\\0\end{pmatrix}$

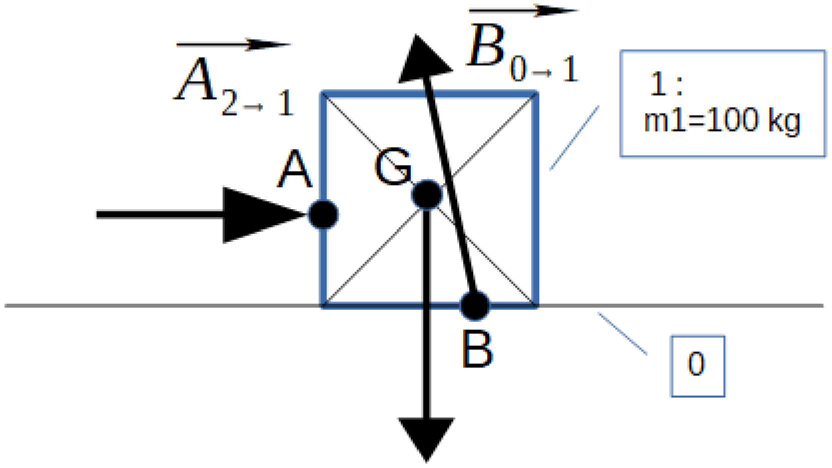
Quel thérorème utiliser ?

Méthode 1

Application 2 (100 % translation)

On souhaite déterminer l'accélération subie par le solide 1

avec $\overrightarrow{A_{2\to1}}\begin{pmatrix}500\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{B_{0\to1}}\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\0\end{pmatrix}$



Les pièces est 1 et 2 sont en acier :

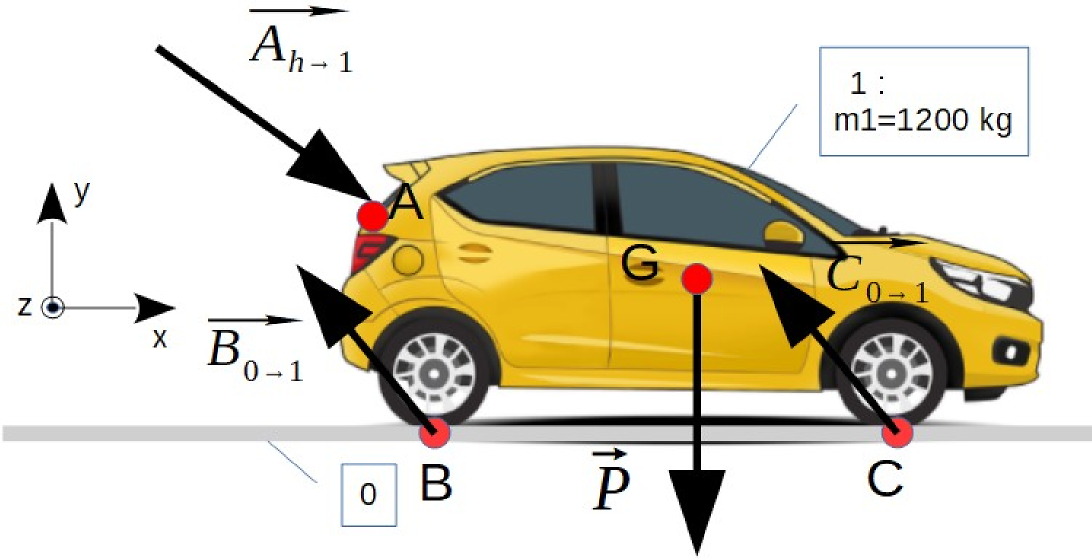
→ coefficients de Coulomb $\mu_s=0{,}18$ $\mu=0{,}15$

- ✔ **Déterminer** les composantes Bx et By et les **positionner** sur le schéma.
- ✔ **Déterminer** l'accélération subie par le solide 1.

Application 3 (100 % translation)

Considérons la voiture ci-dessous, poussée par un homme (h), à laquelle les forces suivantes sont excercées :

$\overrightarrow{A_{h\to 1}}\begin{pmatrix}400\\-150\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{B_{0\to 1}}\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{C_{0\to 1}}\begin{pmatrix}C_x\\C_y\\0\end{pmatrix}$



$\overrightarrow{B_{0\to 1}}$ et $\overrightarrow{C_{0\to 1}}$ représente l'action du sol sur les roues avant et arrière.
Etant donné que la voiture « roule », les pneus ne sont ni à l'adhérence ni au glissement. L'effort tangentiel n'est donc pas une force d'adhérence ($T=\mu_s \cdot N$) ni de frottement/glissement ($T=\mu \cdot N$) !

L'effort tangentiel correspond à la résistance au roulement !

Simplification :

À juste titre la force due à la traînée aérodynamique que l'on sait proportionnelle au carré de la vitesse entre en ligne de compte. Cela conduit à la résolution d'une équation différentielle qui n'est pas au programme de SI en pré-bac. Elle sera donc négligée au même titre que la poussée d'Archimède quasiment systématiquement négligée dans l'air.

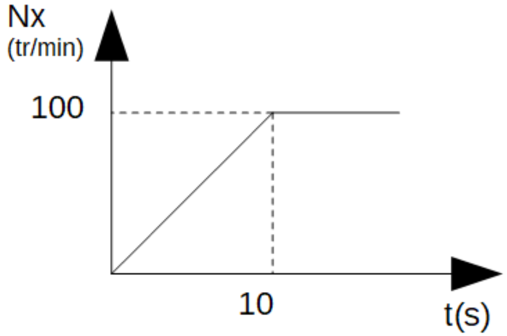
Pour prendre en compte la traînée aérodynamique nous aurons recours à la modélisation multi-physique.

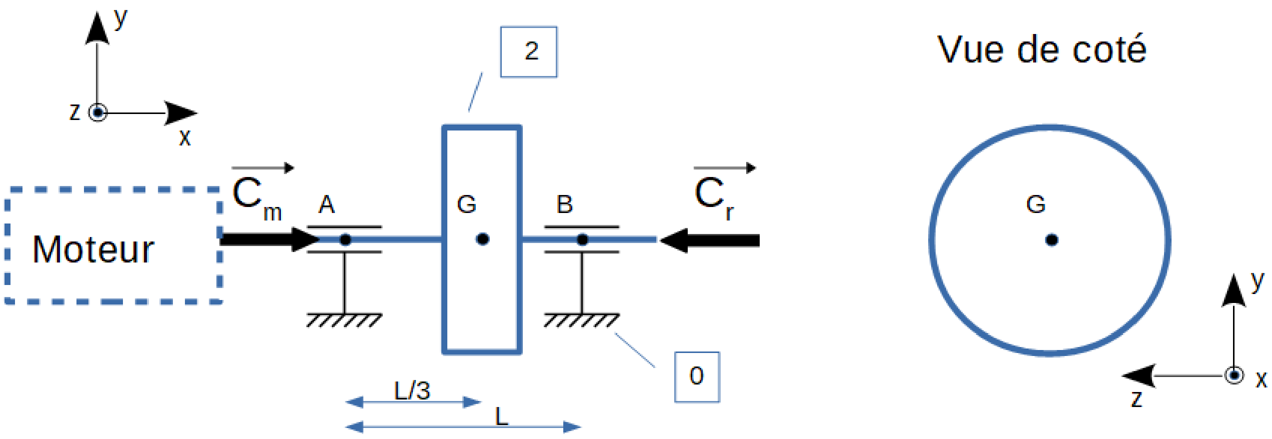
Déterminer le vecteur accélération $\overrightarrow{a_G}$ ainsi que les vecteurs vecteurs vitesse $\overrightarrow{V_{G\in 1/0}}$ et position $\overrightarrow{OG}$ en considérant la vitesse intiale et la position initiale nulles.

Quel thérorème utiliser ?

Application 4 (100 % rotation)

On souhaite déterminer le couple moteur Cm nécessaire à conférer au volant d'inertie 2 (masse m_2 de 32 kg et de moment d'inertie exprimé par la matrice d'inertie $[I_{G2}]$ ci-après) pour atteindre une vitesse de rotation N_2=100 tr/min en 10 secondes.





<u>Bilan des actions mécaniques extérieures (B.A.M.E)</u>

Pour des questions de simplifications, nous ne prendrons pas en compte les efforts mécaniques en A et B ainsi que l'influence du poids appliqué en G car ils n'ont dans le cas présent aucune influence.

$$\vec{C}_m \begin{pmatrix} Cm_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{C}_r \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les couples sont exprimés en N.m
$\vec{C}_m$ est le couple moteur ;
$\vec{C}_r$ est le couple résistant

$$I_{G2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}11 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{G2x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G2z} \end{bmatrix}$$

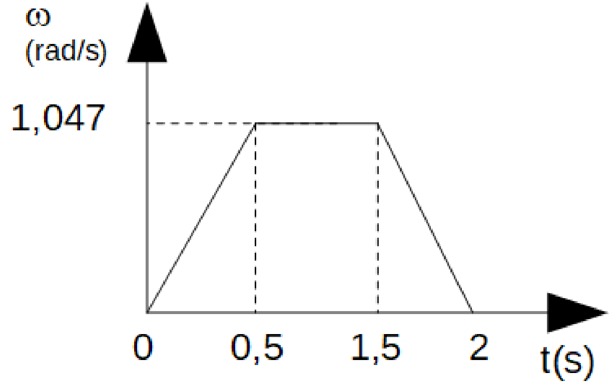
Matrice d'inertie de la pièce (2)
Les moments d'inertie sont exprimés en kg.m²

Déterminons le couple Cm :

Quel thérorème utiliser ?

Application 4 : Barrière levante

On désire déterminer le couple moteur Cm en A nécessaire à **lever** la lisse (1) selon la loi de vitesse indiquée ci-contre.



La lisse (1) a pour masse m_1=4 kg et pour moment d'inertie $J_1=I_{A1z}$=12 kg.m²

La liaison pivot en A présente un couple de frottement Cr (exprimer à la montée de la lisse).

$$\overrightarrow{Cr}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \quad N\cdot m \end{pmatrix}$$

Le centre de gravité G_1 n'est pas situé dans la matière en raison de la forme géométrique de la lisse. (unités exprimées en mètre).

$$\overrightarrow{AG_1}\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

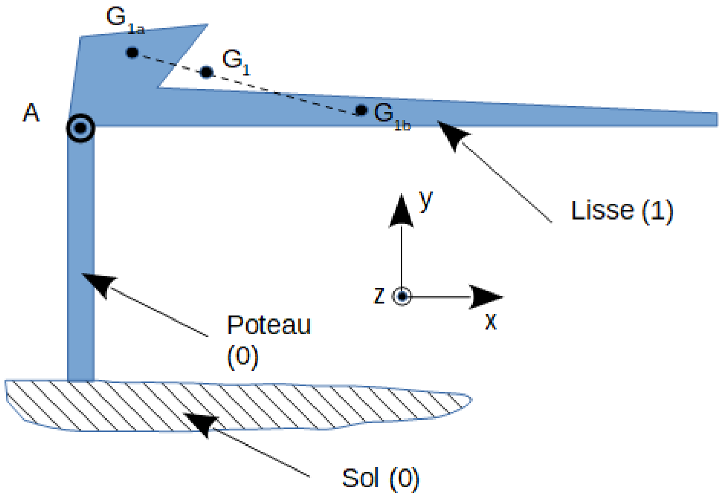
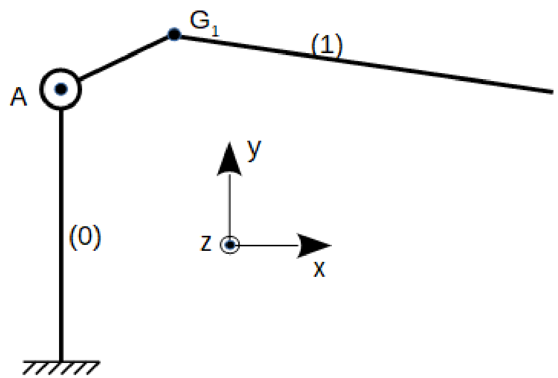


Schéma cinématique



1. <u>Positionner les actions mécaniques sur le schéma cinématique</u>
2. <u>Déterminons le couple Cm :</u> Quel thérorème utiliser ?