Signaux électriques périodiques

« Un signal, c'est de l'énergie. Pour peu, on pourrait dire que cela pèse… »

M. Devos, un cours d'électronique en 1986…

Résumé

Une fois que l'on dispose de la description d'un réseau électrique et la manière de l'étudier, on lui applique des grandeurs électriques dénommées de manière générale signaux.

Une classe particulière souvent rencontrée concerne les signaux périodiques. On définit alors la période, la valeur moyenne, la valeur efficace et le facteur de forme.

Les signaux périodiques sont la superposition d'un signal permanent, la valeur moyenne, et d'une composante fluctuante de valeur moyenne nulle, la composante alternative. Parmi ces dernières, on définit les signaux sinusoïdaux dont les propriétés sont très utilisées en électrocinétique.

Enfin, un signal périodique peut être défini comme la superposition d'ondes sinusoïdales de fréquences multiples de celle du signal de base. Ces descriptions sont résumées sous l'appellation « décomposition de Fourier d'un signal périodique ».

Sommaire

I. Caractérisation des signaux électriques

Les signaux électriques dépendent du temps. Ils sont représentés par une fonction de la variable réelle du temps (ex : la tension $u = f(t)$). La valeur du signal à l'instant t est appelée valeur instantanée ; elle est notée en lettres minuscules.

Si la valeur instantanée est constante, le signal est dit continu ; il est noté en lettres majuscules. On emploi aussi les lettres majuscules dans le cas des grandeurs établies.

I.1. Signal périodique

Un signal $s(t)$ est T-périodique si on peut trouver la plus petite valeur T appelée période telle que :

$\boxed{s(t) = s(t + nT)}$ avec n un entier naturel

La période s'exprime en secondes (s).

On définit la fréquence par

$f = \dfrac{1}{T}$ exprimée en Hertz[1] (Hz).

I.2. Valeur moyenne

La valeur moyenne d'un signal $s(t)$ est notée indifféremment $\langle s(t) \rangle$, S_{moy} , S_0 ou $\overline{S}$.

Sur sa période, la valeur moyenne d'un signal T-périodique $s(t)$ est défini par :

$$\boxed{\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt}$$

Attention : il ne faut pas abuser de l'intégrale pour les signaux simples.

Remarque : la valeur moyenne est algébrique. Elle est comprise entre ses extrema.

Considérations pratiques

Une valeur moyenne est mesurée avec un appareil magnétoélectrique (symbole) s'il est analogique (ces appareils tendent à disparaître) ou numérique en position continue (symbole =).

I.3. Valeur efficace

La valeur efficace d'un signal $s(t)$ est souvent notée par S_{eff} ou en lettre majuscule.

Sur une période, la valeur efficace d'un signal T-périodique $s(t)$ est définie par :

$$\boxed{{S_{eff}}^2 = \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)dt}$$

Remarques :

- la valeur efficace est toujours positive. Si elle est nulle, la fonction est identiquement nulle (propriété des fonctions positives) ;
- la valeur efficace est exprimée par un carré ; elle est donc liée à la puissance $p(t)$ (ex : résistance, $p_R(t) = R.i^2(t)$ donc $w(t) = R.{I_{eff}}^2$).

Considérations pratiques

Une valeur efficace est mesurée avec un appareil :

- ferromagnétique (symbole), c'est un type analogique qui tend à disparaître ;
- **magnétoélectrique à redresseur** (symbole), qui tend aussi à disparaître ;
- à **thermocouple** (symbole), complètement abandonné ;
- ou numérique en position RMS (*Root mean square,* $\sqrt{\langle s^2(t) \rangle}$).

[1] Hertz (Heinrich), physicien allemand (1857-1894).

I.4. Facteur de forme

Pour quantifier la valeur efficace par rapport à la valeur moyenne, on définit le facteur de forme d'un signal *s*(*t*) par :

$$\boxed{F = \frac{S_{eff}}{S_0} = \frac{\sqrt{\langle s^2(t)\rangle}}{\langle s(t)\rangle}}$$

Remarque : *F* est sans unité.

Cette grandeur est parfois utile dans les redresseurs pour quantifier les deux grandeurs produites.

II. Signaux d'usage courant

II.1. Signal alternatif

Un signal alternatif est un signal périodique de valeur moyenne nulle.

Propriété

un signal périodique (*s(t)*) quelconque est superposition d'un signal alternatif (*$s_\sim(t)$*) et d'un signal constant appelé composante continue égale à sa valeur moyenne ($\langle s(t)\rangle$) :

$$\boxed{s(t) = s_\sim(t) + \langle s(t)\rangle}$$

Les oscilloscopes exploitent cette particularité grâce au commutateur AC-DC :

- en position DC (*During Current*), tout le signal est observé ;
- en AC (*alternative Current*), seule la composante variable est observée ;

II.2. Signal sinusoïdal

Expression temporelle

Un signal sinusoïdal *s(t)* s'exprime de la manière suivante :

$$\boxed{s(t) = \hat{S}\cos(\omega t + \varphi)\begin{cases} \hat{S} \text{ est l'amplitude du signal.} \\ \omega \text{ est la pulsation (rad.s}^{-1}\text{)}, \ \omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}. \\ \omega t + \varphi \text{ est la phase instantanée.} \\ \varphi \text{ est la phase initiale (à t = 0).} \end{cases}}$$

Valeur efficace

La valeur efficace du signal *s(t)* est telle que :

$$S_{eff}^{\ 2} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{S}^2 \sin^2(\omega t + \varphi)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{S}^2 \sin^2(\theta)d\theta \text{ , c'est-à-dire :}$$

$$\boxed{S_{eff} = \frac{\hat{S}}{\sqrt{2}}}$$

Remarque : pour un tel signal, le rapport de la valeur maximale sur la valeur efficace est constant. On utilise toujours ce résultat pour décrire un signal sinusoïdal.

III. Introduction à la décomposition en série de Fourier[2]

III.1. Définitions

Un résultat mathématique nous indique qu'un signal *T*-périodique *s(t)* (continu et dérivable sauf en un nombre fini de points) peut être écrit sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoïdales temporelles. Ceci s'exprime sous la forme :

$$\boxed{s(t) = \langle s(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \text{ où } \begin{cases} \langle s(t) \rangle \text{ est la valeur moyenne de } s(t). \\ S_n \text{ est le coefficient de Fourier de rang } n \text{ (entier naturel).} \\ \varphi_n \text{ est la phase du signal de rang } n. \end{cases}}$$

On appelle harmonique de rang *n* (ou *n*-harmonique), le signal sinusoïdal de rang *n*.

Les coefficients de Fourier S_n représentent l'amplitude des harmoniques successifs.

L'harmonique de rang 1 (premier harmonique) est appelé le fondamental.

Le signal *s(t)* peut être écrit comme combinaison linéaire de fonctions Sinus et Cosinus :

$$\boxed{s(t) = \langle s(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)}$$

On a alors : $S_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ *et* $\varphi_n = \arctan(\frac{b_n}{a_n})$

Cette forme permet de justifier plus aisément les propriétés suivantes :

- si la fonction *s(t)* est paire, les coefficients b_n sont tous nuls (aucun terme impair n'apparaît).
- si la fonction *s(t)* est impaire, les coefficients a_n sont tous nuls (aucun terme pair n'apparaît).

Les coefficients a_n et b_n s'expriment par :

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(n\omega t)dt \end{aligned}}$$

Le graphe représentant les coefficients de Fourier en fonction de leur rang est appelé spectre en fréquence du signal *s(t)*.

On définit deux graphes : un pour les a_n, un autre pour les b_n. On peut aussi faire figurer S_n et φ_n dans un graphique tel qu'à la Figure 1.

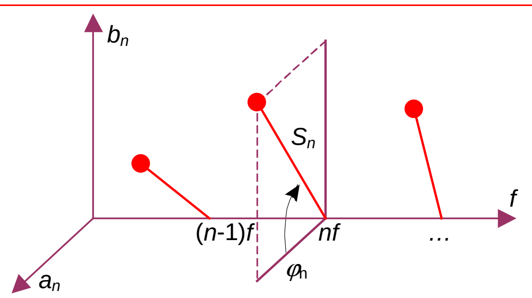

Figure 1

Remarque pratique : l'appareil permettant d'observer le spectre d'un signal périodique est appelé analyseur de spectre.

2 Fourier (Baron Joseph), mathématicien français (1772-1830).

III.2. Illustration de la décomposition en série de Fourier

Pour rendre cette notion abstraite un peu plus “visuelle”, on pourra consulter la représentation tridimensionnelle d’un signal électrique (***Figure 2***).

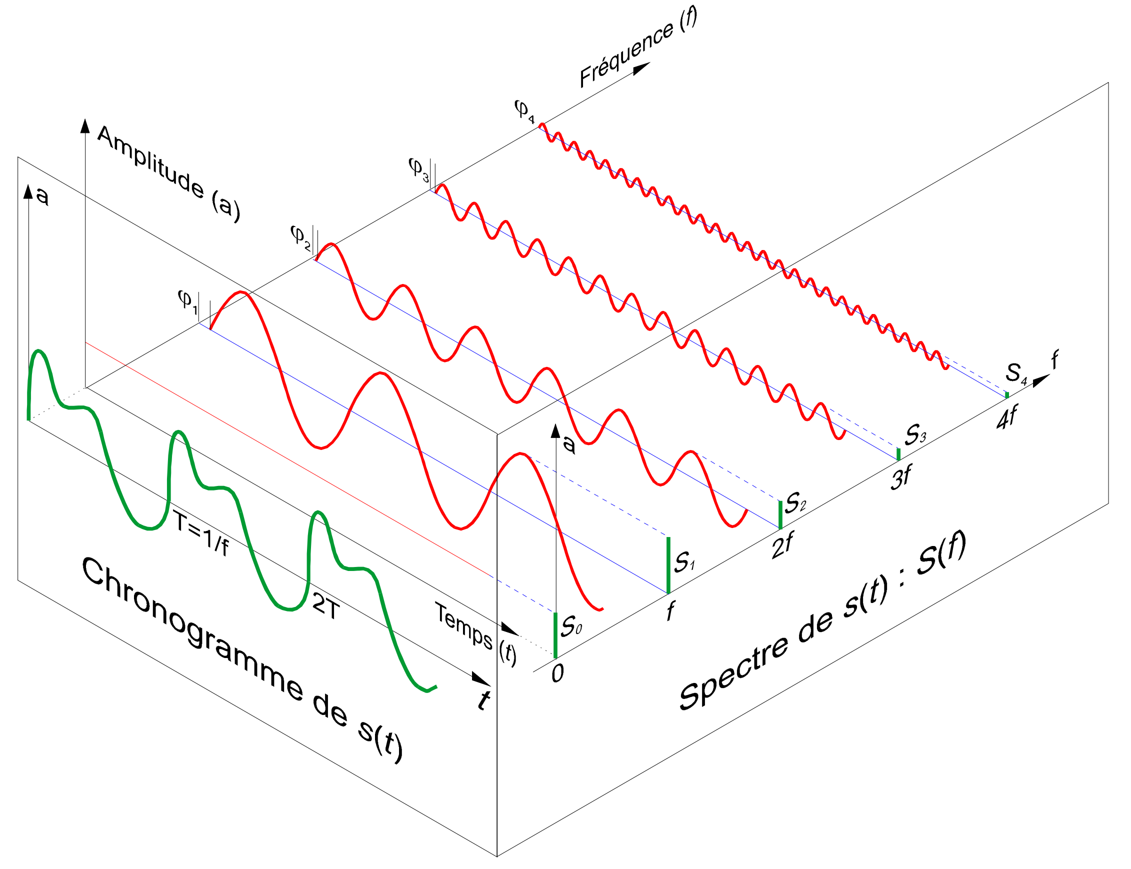

Figure 2 : représentation tridimensionnelle d'un signal périodique.

III.3. Exemple

Un exemple de décomposition en série de Fourier jusqu’à l’ordre 9 du signal carré de la ***Figure 3*** est donné à la ***Figure 4***.

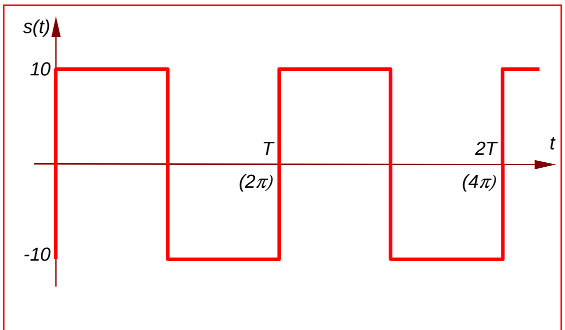

Figure 3 : signal carré à décomposer.

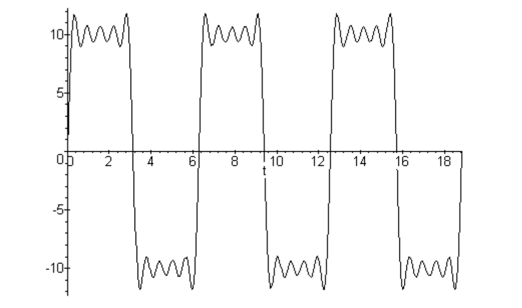

Figure 4 : représentation du signal carré

IV. Bibliographie

- [1] Beauvillain R. et Laty J. Mesures électriques et électroniques. Hachette technique.