

Modélisation de la dynamique de systèmes multi-physiques par Bond Graphs

Marc Rébillat

PIMM, ENSAM

marc.rebillat@ensam.eu

Modélisation de la dynamique de systèmes multi-physiques par “Bond Graphs”

1: Introduction aux Bond Graphs

Marc Rébillat
PIMM, ENSAM
marc.rebillat@ensam.eu

Evaluation

- Passage au tableau lors d'un ED (**préparation** des exercices obligatoire avant chaque séance)
- Questionnaire à choix multiples (QCM)

Concurrence sévère dans le milieu industriel

- Besoins d'innovation
- Optimisation des produits
- Réduction des coûts
- Erreurs de conception à éviter



Figure 1: Le 25/02/2011, Toyota rappelle plus de 2 millions de voitures.

Les industriels ont besoin de **modéliser** et de **simuler** leurs systèmes lors de la phase de conception.

Les systèmes à simuler sont généralement **multi-physiques**

- Mécanique
- Électrique
- Hydraulique
- Thermique
- ...

BOND GRAPHS

*Formalisme permettant de **modéliser** et de **simuler** la **dynamique** de systèmes **multi-physiques**.*



De la puissance aux Bond Graphs

Éléments d'un Bond Graph

Jonctions

Construction d'un Bond Graph

Définitions de la puissance

La notion de **puissance** (exprimée en Watt) est commune à tous les domaines de la physique.

Domaine	Puissance	"Effort"		"Flux"	
Translation	$F \times V$	Force	N	Vitesse	$\text{m} \times \text{s}^{-1}$
Rotation	$\Gamma \times \omega$	Couple	$\text{N} \times \text{m}$	Vitesse angulaire	$\text{rad} \times \text{s}^{-1}$
Électricité	$U \times I$	Tension	V	Intensité	$\text{A} (\text{C} \times \text{s}^{-1})$
Hydraulique	$p \times Q$	Pression	Pa	Débit	$\text{m}^3 \times \text{s}^{-1}$
Thermique	$T \times j$	Température	K	Courant thermique	$\text{J} \times \text{s}^{-1}$

Table 1: Puissance dans les différents domaines de la physique.

Remarque: l'unité d'un flux fait toujours intervenir des " s^{-1} ".

Formalisation du concept de puissance

La puissance est toujours le produit de **deux variables duales**

$$P(t) = e(t) \times f(t) \quad (1)$$

- $e(t)$: **Effort généralisé**
- $f(t)$: **Flux généralisé**

Grandeurs énergétiques associées

L'**énergie** $E(t)$ associée à $P(t)$ est définie par:

$$E(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau \quad (2)$$

Le **moment généralisé** $p(t)$ est défini par:

$$p(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (3)$$

Le **déplacement généralisé** $q(t)$ est défini par:

$$q(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (4)$$

Principe du Bond Graph

Transmettre de la puissance de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ revient donc à transmettre deux variables duales (e, f) de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$.

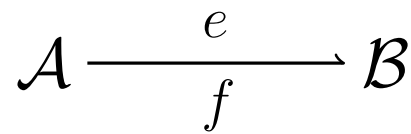


Figure 2: Bond Graph représentant le transfert de puissance de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$

- Un arc orienté, terminé par une **demi-flèche** transporte deux variables duales.
- L'orientation de la demi-flèche indique que $\mathcal{A}$ transmet la puissance vers $\mathcal{B}$.

Exemple

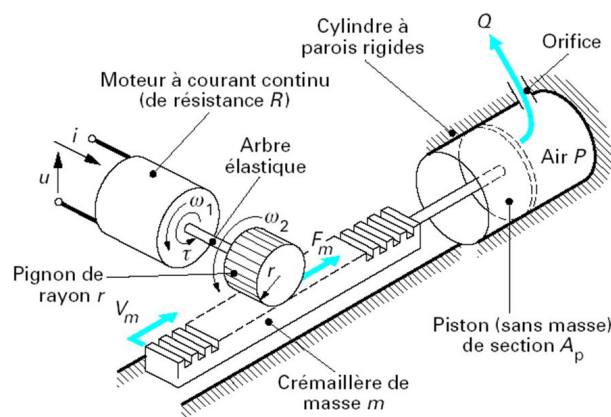


Figure 3: Exemple de système dynamique multi-physique

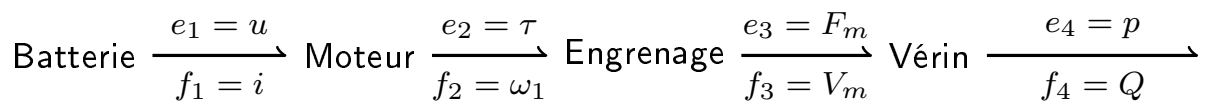


Figure 4: Bond Graph à mots représentant le système de la Fig. 3.

De la puissance aux Bond Graphs

Éléments d'un Bond Graph

Jonctions

Construction d'un Bond Graph

Source de flux

$$\mathcal{S}_f : F \xrightarrow[f]{e}$$

Figure 5: Source de flux générant un flux $f = F$.

Une source de flux génère la variable flux (f) du lien qui lui est connecté, quelquesoit l'effort (e).

Exemples: Générateur de courant électrique, pompe hydraulique à débit constant.

Source d'effort

$$\mathcal{S}_e : E \xrightarrow[f]{e}$$

Figure 6: Source d'effort générant un effort $e = E$.

Une source d'effort génère la variable effort (e) du lien qui lui est connecté, quelquesoit le flux (f).

Exemples: Générateur de tension électrique, générateur de couple, thermostat.

Élément résistif

$$\xrightarrow[f]{e} R : r$$

Figure 7: Élément résistif de valeur r .

L'élément résistif est défini par une relation statique (*i.e.* indépendante du temps) liant l'effort e et le flux f .

- *Cas linéaire:*

$$\boxed{e(t) = r \times f(t)} \quad (5)$$

- *Cas général:*

$$\boxed{e(t) = r [f(t)]} \quad (6)$$

Exemples d'éléments résistifs

Domaine	Interprétation	Formulation
Translation	Frottement visqueux	$F = rV$
	Frottement sec	$F = r \times \text{sgn}(V)$
Rotation	Frottement visqueux	$\Gamma = r\omega$
	Frottement sec	$\Gamma = r \times \text{sgn}(\omega)$
Hydraulique	Restriction pour un écoulement laminaire	$p = rQ$
	Restriction pour un écoulement turbulent	$p = rQ^2$
Électricité	Résistance	$U = rI$

Table 2: Éléments résistifs dans différents domaines de la physique (cf. Tab. 1 pour les notations).

Élément inertiel

$$\xrightarrow[f]{e} I : i$$

Figure 8: Élément inertiel de valeur i .

L'élément inertiel est défini par une relation statique liant le flux $f(t)$ et le moment $p(t)$:

$$\boxed{p(t) = i \times f(t)} \quad \text{avec} \quad p(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (7)$$

qui s'écrit encore:

$$f(t) = \frac{1}{i} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad \text{ou} \quad e(t) = i \frac{df}{dt} \quad (8)$$

Exemples d'éléments inertiels

Domaine	Interprétation	Formulations	
Translation	Masse en translation	$F = M \frac{dV}{dt}$	$V = \frac{1}{M} \int_0^t F(\tau) d\tau$
Rotation	Masse en rotation	$\Gamma = J \frac{d\omega}{dt}$	$\omega = \frac{1}{J} \int_0^t \Gamma(\tau) d\tau$
Hydraulique	Tube	$p = I \frac{dQ}{dt}$	$Q = \frac{1}{I} \int_0^t p(\tau) d\tau$
Électricité	Inductance	$U = L \frac{dI}{dt}$	$I = \frac{1}{L} \int_0^t U(\tau) d\tau$



Volant d'inertie



Bobine



Tube

Table 3: Éléments inertiels dans différents domaines de la physique (cf. Tab. 1 pour les notations).

Stockage d'énergie cinétique

L'élément inertiel stocke de l'énergie cinétique.

$$E(t) = \int_0^t e(\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t i \frac{df}{d\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2} i f^2(t) \quad (9)$$

Exemples:

$$\text{Translation} \quad E(t) = \frac{1}{2} M V^2(t)$$

$$\text{Électricité} \quad E(t) = \frac{1}{2} L I^2(t)$$

Élément capacitif

$$\frac{e}{f} \rightarrow C : c$$

Figure 9: Élément capacitif de valeur c .

L'élément capacitif est défini par une relation statique liant l'effort $e(t)$ et le déplacement $q(t)$:

$$\boxed{q(t) = c \times e(t)} \quad \text{avec} \quad q(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (10)$$

qui s'écrit encore:

$$e(t) = \frac{1}{c} \int_0^t f(\tau) d\tau \quad \text{ou} \quad f(t) = c \frac{de}{dt} \quad (11)$$

Exemples d'éléments capacitifs

Domaine	Interprétation	Formulations
Translation	Ressort linéaire	$V = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt} \quad F = k \int_0^t V(\tau) d\tau$
Rotation	Ressort de torsion	$\omega = \frac{1}{k} \frac{d\Gamma}{dt} \quad \Gamma = k \int_0^t \omega(\tau) d\tau$
Hydraulique	Réservoir	$Q = C \frac{dp}{dt} \quad p = \frac{1}{C} \int_0^t Q(\tau) d\tau$
Électricité	Condensateur	$I = C \frac{dU}{dt} \quad U = \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau$



Ressort linéaire



Réservoir



Condensateur

Table 4: Éléments capacitifs dans différents domaines de la physique (cf. Tab. 1 pour les notations).

Stockage d'énergie potentielle

L'élément capacitif **stocke de l'énergie potentielle**.

$$E(t) = \int_0^t e(\tau) c \frac{de}{d\tau} d\tau = \frac{1}{2} c e^2(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{c} \quad (12)$$

Exemples:

$$\text{Translation} \quad E(t) = \frac{1}{2} k x^2(t)$$

$$\text{Électricité} \quad E(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C}$$

Machines "idéales"

Une machine idéale $\mathcal{M}$ réalise une conversion de puissance sans aucunes pertes.

$$\begin{array}{c} e_1 \\ \hline f_1 \end{array} \rightarrow \mathcal{M} \begin{array}{c} e_2 \\ \hline f_2 \end{array}$$

Figure 10: Machine idéale $\mathcal{M}$.

La conservation de la puissance impose alors:

$$e_1 f_1 = e_2 f_2 \quad (13)$$

Transformateur

$$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow TF : m \frac{e_2}{f_2}$$

Figure 11: Transformateur de rapport m .

Le transformateur multiplie le **flux** f_1 par m pour générer le **flux** f_2 .

$$\begin{cases} f_2 = m f_1 \\ e_1 = m e_2 \end{cases} \quad (14)$$

Exemples de transformateurs

Domaine	Transformateur
Translation	Levier
Rotation	Engrenage
Électricité	Transformateur électrique
Mécano-hydraulique	Vérin

Table 5: Transformateurs dans différents domaines de la physique



Gyrateur

$$\begin{array}{c} e_1 \\ \hline f_1 \end{array} \rightarrow GY : m \begin{array}{c} e_2 \\ \hline f_2 \end{array}$$

Figure 12: Gyrateur de rapport m .

Le gyrateur multiplie le **flux** f_1 par m pour générer l'**effort** e_2 .

$$\begin{array}{l} e_2 = m f_1 \\ e_1 = m f_2 \end{array} \quad (15)$$

Exemples de gyrateurs

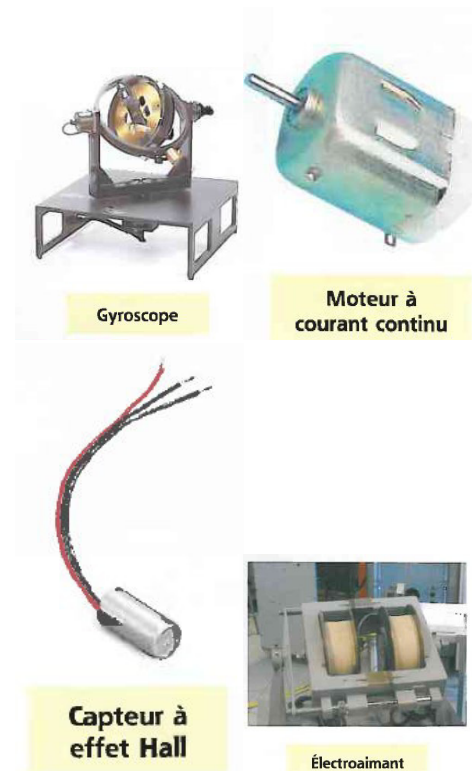
Domaine

Rotation
Mécano-électrique
Mécano-électrique
Électricité

Gyrateur

Gyroscope
Machine à courant continu
Électro-aimant
Capteur à effet Hall

Table 6: Gyrateurs dans différents domaines de la physique



De la puissance aux Bond Graphs

Éléments d'un Bond Graph

Jonctions

Construction d'un Bond Graph

Comment relier entre eux les différents éléments?

Une jonction $\mathcal{J}$ permet de relier entre eux N éléments d'un Bond Graph.

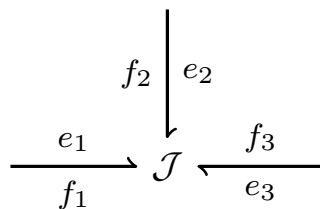


Figure 13: Exemple de jonction $\mathcal{J}$ à $N = 3$ liens.

La conservation de la puissance impose:

$$\boxed{\sum_{n=1}^N a_n e_n f_n = 0} \quad \text{avec} \quad a_n = \pm 1 \quad \text{selon le sens de la flèche.}$$

Jonction 1 (flUx: Un)

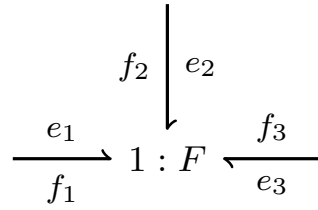


Figure 14: Exemple de jonction 1 à $N = 3$ liens.

Les **flux** sur tous les liens arrivant ou partant d'une jonction 1 sont **identiques**:

$$f_1 = f_2 = f_3 = \dots = f_N = F \quad (16)$$

La conservation de la puissance impose alors:

$$\sum_{n=1}^N a_n e_n = 0 \quad \text{avec} \quad a_n = \pm 1 \quad \text{selon le sens de la flèche.}$$

Exemples: loi des mailles, principe fondamental de la dynamique.

Jonction 0 (effOrt: zerO)

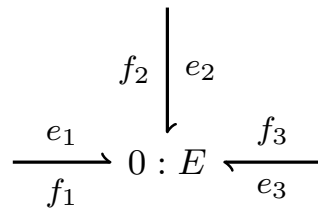


Figure 15: Exemple de jonction 0 à $N = 3$ liens.

Les **efforts** sur tous les liens arrivant ou partant d'une jonction 0 sont **identiques**:

$$e_1 = e_2 = e_3 = \dots = e_N = E \quad (17)$$

La conservation de la puissance impose alors:

$$\sum_{n=1}^N a_n f_n = 0 \quad \text{avec} \quad a_n = \pm 1 \quad \text{selon le sens de la flèche.}$$

Exemples: loi des noeuds.

De la puissance aux Bond Graphs

Éléments d'un Bond Graph

Jonctions

Construction d'un Bond Graph

Systemes mécaniques

Méthodologie:

1. Analyse: choisir un repère et orienter les variables.
2. Matérialiser chaque vitesse par une jonction 1.
3. Construire des relations entre les vitesses avec des jonctions 0.
4. Connecter les éléments I , R , C aux jonctions.
5. Placer les sources.
6. Simplifier si possible.

Exemple

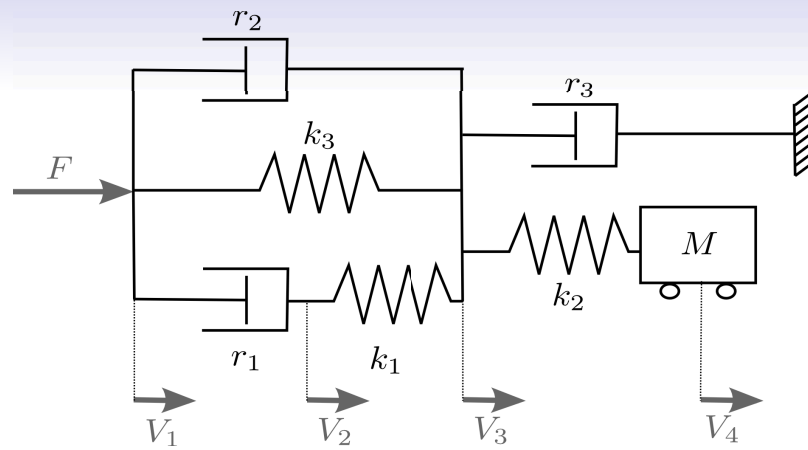


Figure 16: Système mécanique à modéliser

1: Analyse

2: Matérialiser chaque vitesse par une jonction 1

1 : V_1 1 : V_2 1 : V_3 1 : V_4

Figure 17: Matérialisation des vitesses.

3: Construire des relations entre les vitesses

 $1 : V_1$
 $1 : V_2$
 $1 : V_3$
 $1 : V_4$

Figure 18: Matérialisation des différences de vitesses.

4 & 5: Éléments I , R , C et sources

 $1 : V_1$
 $1 : V_2$
 $1 : V_3$
 $1 : V_4$

Figure 19: Connecter les sources et les éléments I , R , C aux jonctions.

Systèmes électriques

Méthodologie:

1. Analyse: détermination des potentiels et choix sur chaque branche d'un sens de circulation du courant.
2. Affecter une jonction 0 à chaque potentiel.
3. Insérer une jonction 1 entre chaque jonction 0 si un élément I , R ou C ou une source est situé entre les deux potentiels correspondant.
4. Affecter les sens de transmission de la puissance en reliant les jonctions par des liens.
5. Placer les éléments R , C et L ainsi que les sources.
6. Simplifier si possible.

Exemple

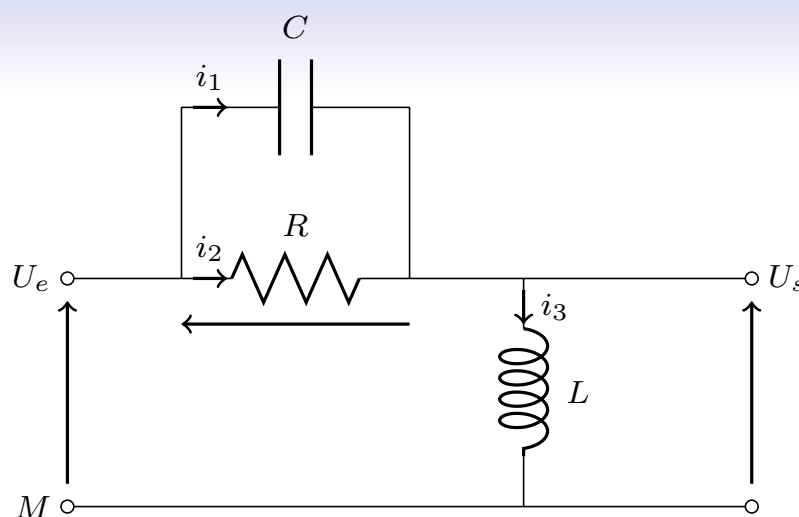


Figure 20: Système électrique à modéliser.

1: Analyse

2: Affecter une jonction 0 à chaque potentiel.

 $0 : U_e$ $0 : U_s$ $0 : M$

Figure 21: Mise en place des potentiels.

3 & 4: Différences de potentiel et des liaisons.

 $0 : U_e$ $0 : U_s$ $0 : M$

Figure 22: Insérer une jonction 1 entre chaque jonction 0 et relier les jonctions.

5: Placer les éléments R , C et L ainsi que les sources

$$0 : U_e$$

$$0 : U_s$$

$$0 : M$$

Figure 23: Placement des éléments R , C et L ainsi que des sources.

Règles de simplification des Bond Graphs

- Si une jonction $\mathcal{J}$ (0 ou 1) n'a qu'un lien en entrée et un lien en sortie, alors on peut éliminer cette jonction.

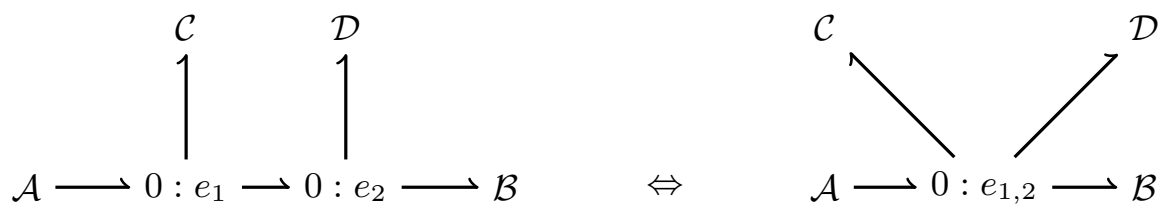
$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

Règles de simplification des Bond Graphs (suite)

- Si deux jonctions 1 sont reliées par un seul lien, on peut les réduire à une seule jonction 1 traduisant le flux commun.



- Si deux jonctions 0 sont reliées par un seul lien, on peut les réduire à une seule jonction 0 traduisant l'effort commun.



Règles de simplification des Bond Graphs (suite)

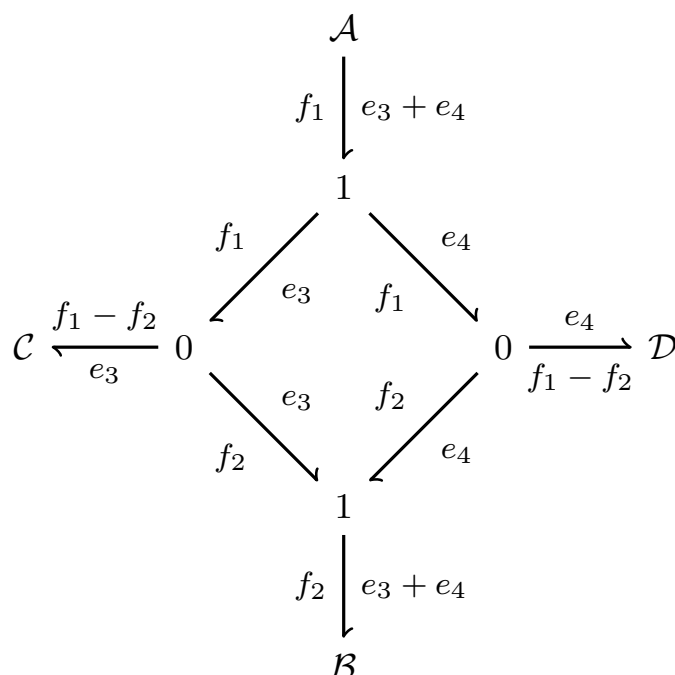


Figure 24: Même effort sur les entrées A et B et même flux sur les sorties C et D .

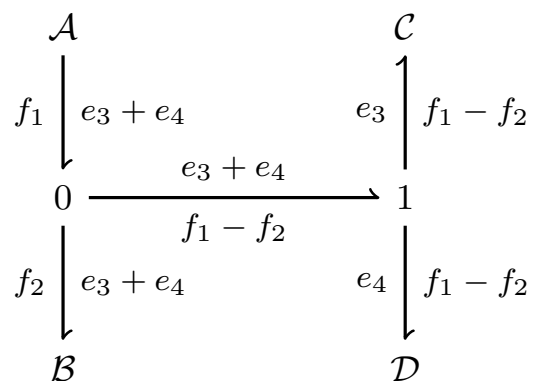


Figure 25: Schéma équivalent à la Fig. 24.

Simplification du schéma mécanique de la Fig. 19

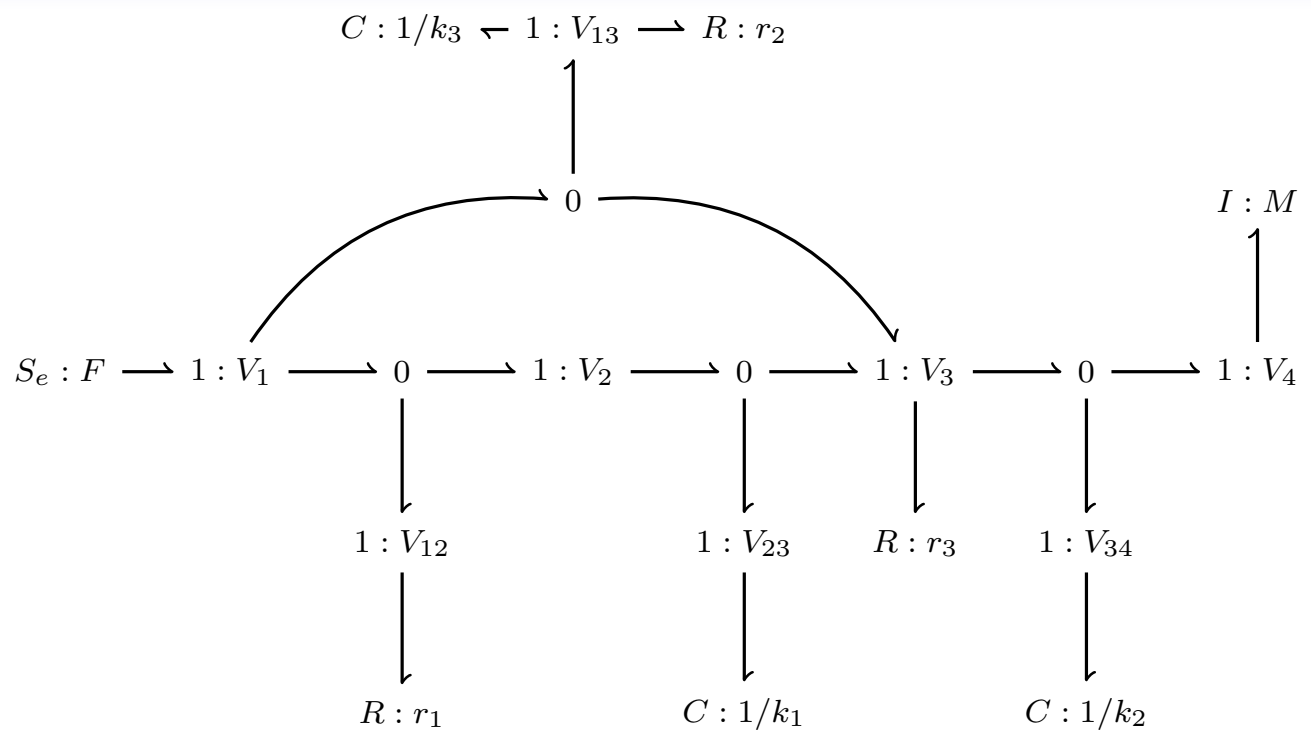


Figure 26: Bond graph à simplifier.

Simplification du schéma mécanique de la Fig. 19

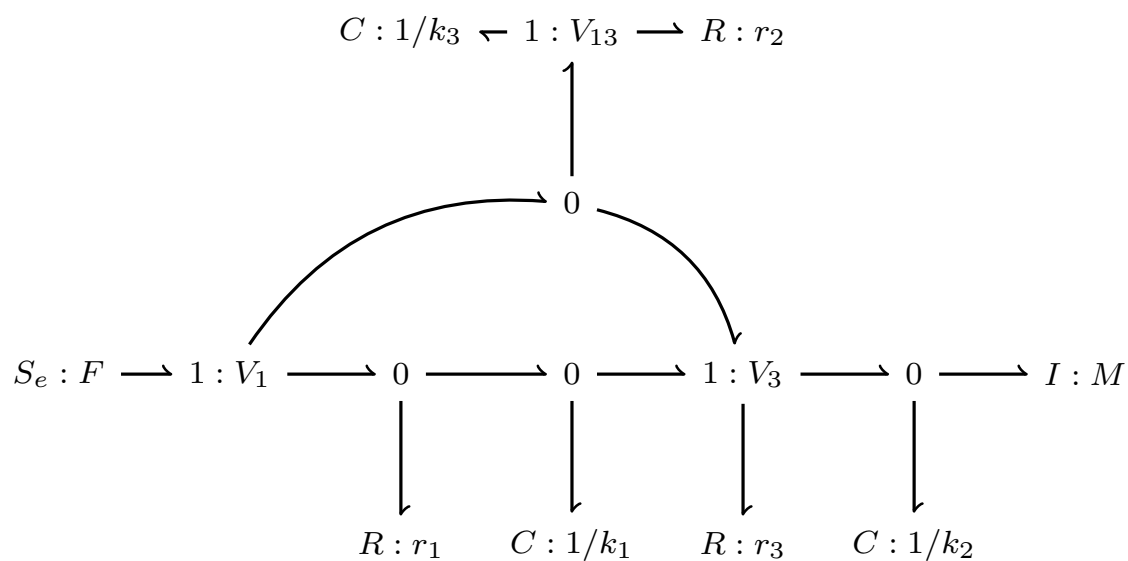


Figure 27: Version simplifiée par application de la règle: Si une jonction $\mathcal{J}$ (0 ou 1) n'a qu'un lien en entrée et un lien en sortie, alors on peut éliminer cette jonction.

Simplification du schéma mécanique de la Fig. 19 (suite)

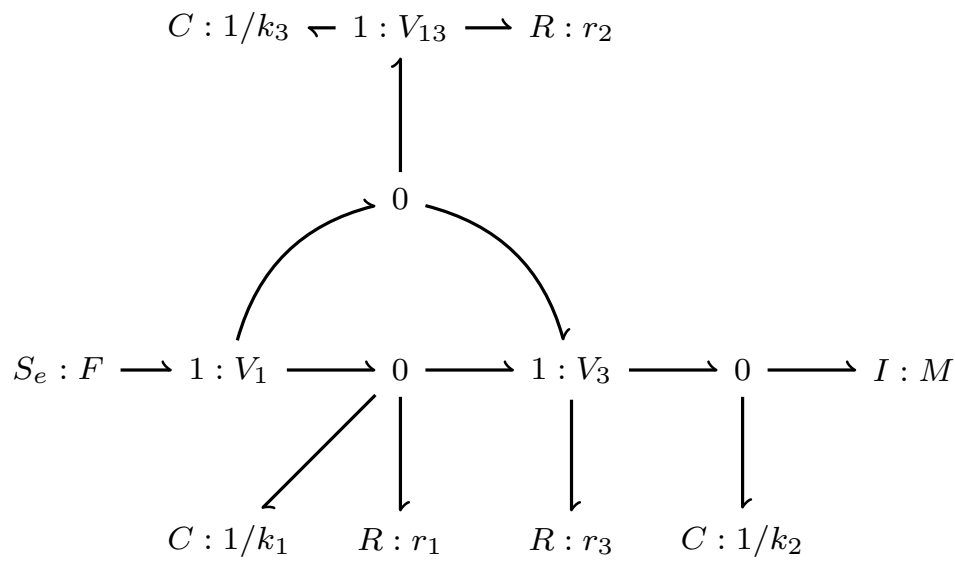


Figure 28: Version simplifiée par application de la règle: *Si deux jonctions 0 sont reliées par un seul lien, on peut les réduire à une seule jonction 0 traduisant l'effort commun.*

Simplification du schéma électrique de la Fig. 23

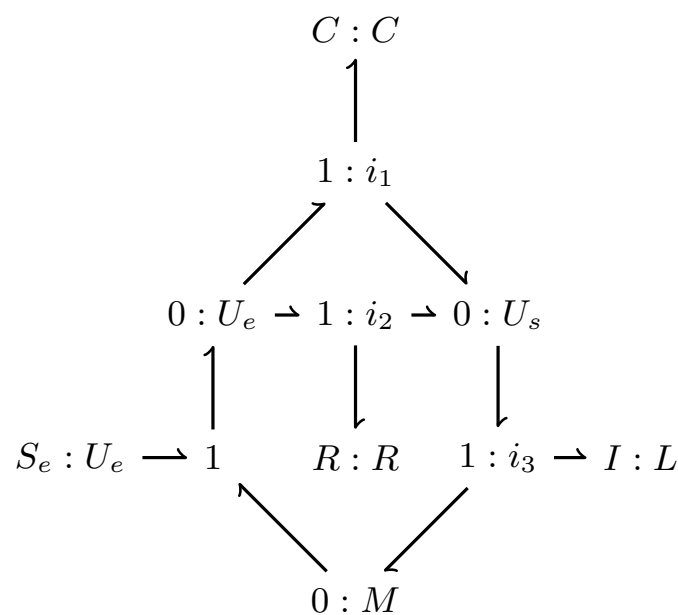


Figure 29: Bond graph à simplifier.

Simplification du schéma électrique de la Fig. 23

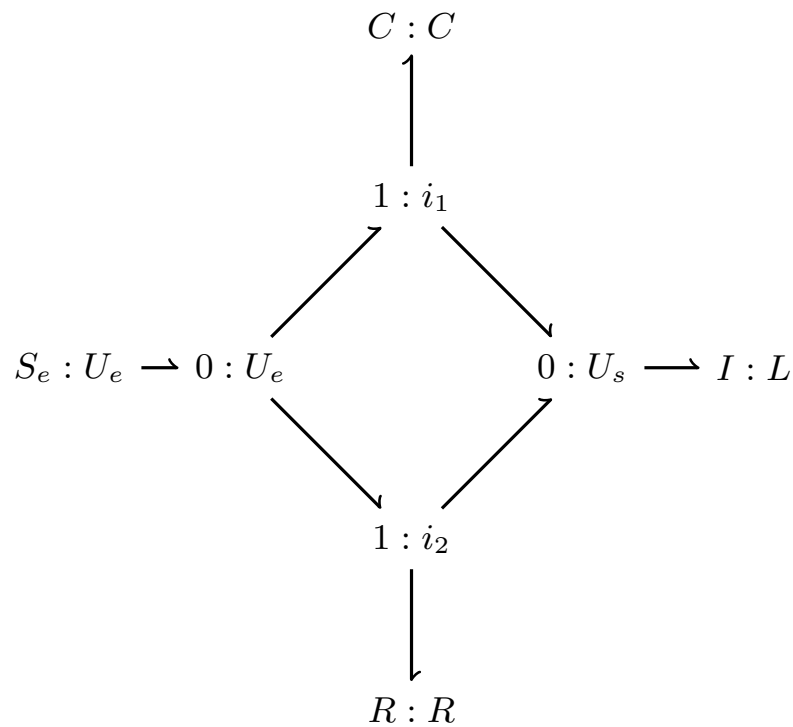


Figure 30: Version simplifiée obtenue en supprimant le potentiel de référence M et en appliquant les règles de simplification simples.

Simplification du schéma électrique de la Fig. 23 (suite)

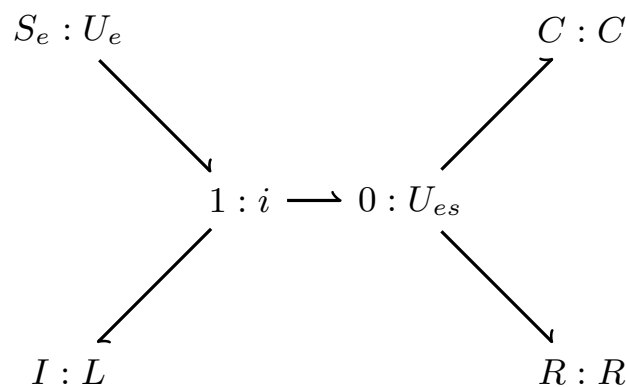
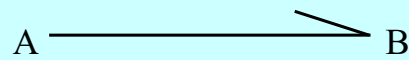


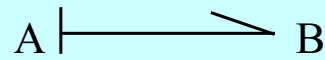
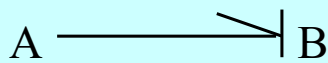
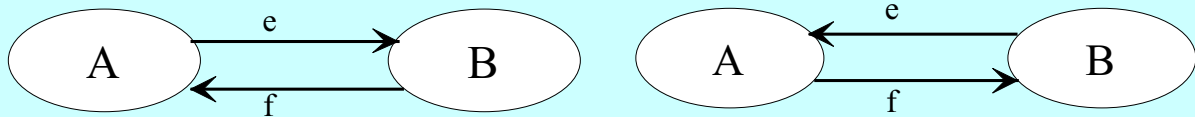
Figure 31: Version simplifiée obtenue en considérant qu'il y'a le même flux (intensité $i = i_1 + i_2$) sur les liaisons $Se : U_e$ et $I : L$ et le même effort (tension $U_{es} = U_e - U_s$) sur les liaisons $C : C$ et $R : R$.

I. BUT

Quand le système A transmet de la puissance au système B, nous avons :



La **demi-flèche** signale **le sens** de transmission de la puissance. Deux possibilités :



La **barre** signale quel système **impose l'effort (entrée, cause)** lors de la transmission de la puissance.

La causalité ...

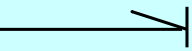
- a) **définit la cause et la conséquence,**
- b) va structurer les équations,
- c) permet dans certains cas de détecter des erreurs de modélisation.

Remarque :

« *Barre de causalité* » et « *demi flèche* » sont deux notions indépendantes

II. Causalité des éléments de base

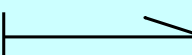
Source d'effort

Se :  B

L'effort est imposé par la source.

La source subit le flux.

Source de flux

Sf :  B

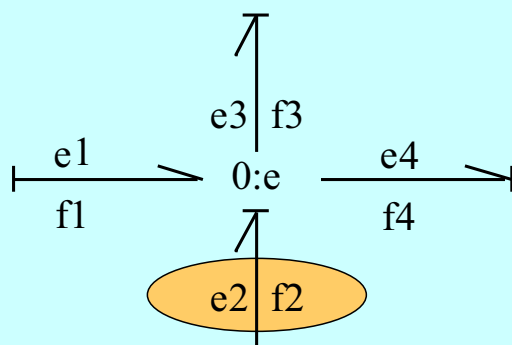
Le flux est imposé par la source.

La source subit l'effort.

Jonction 0

La jonction 0 correspond à une **égalité des efforts**:

- un seul lien peut imposer l'effort à la jonction.
- **un seul lien avec barre de causalité** auprès de la jonction.



$e2$ est imposé à la jonction:

$$e1 = e3 = e4 = \{e2\}$$

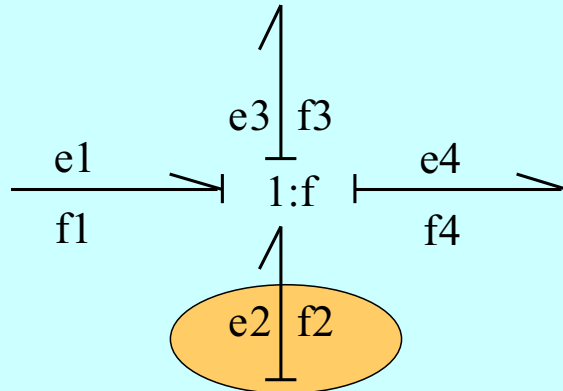
La jonction impose à son tour $f2$:

$$f2 = -f1 + f3 + f4$$

Jonction 1

La jonction 1 correspond à une **égalité des flux**:

- un lien peut imposer son flux à la jonction.
- **un seul lien sans barre de causalité** auprès de la jonction.



f_2 est imposé à la jonction:

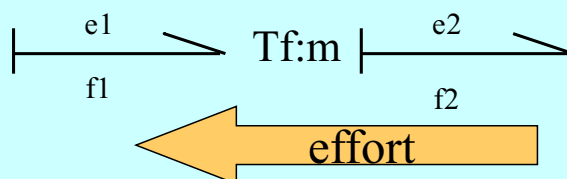
$$f_1 = f_3 = f_4 = \{f_2\}$$

La jonction impose à son tour e_2 :

$$e_2 = -e_1 + e_3 + e_4$$

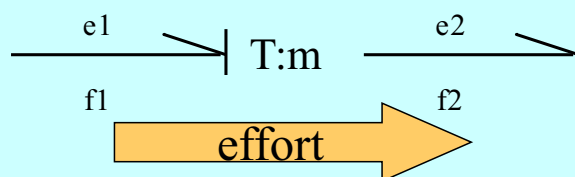
Transformateur

Premier cas



$$\begin{cases} e_1 = m \cdot e_2 \\ f_2 = m \cdot f_1 \end{cases}$$

Second cas

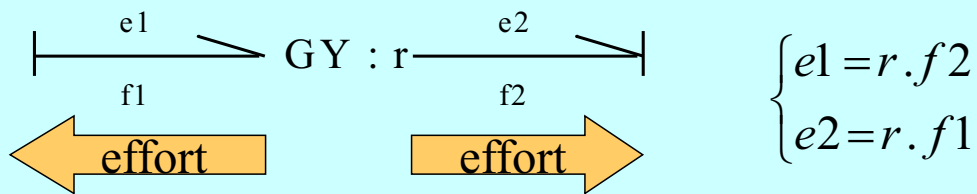


$$\begin{cases} e_2 = \frac{1}{m} \cdot e_1 \\ f_1 = \frac{1}{m} \cdot f_2 \end{cases}$$

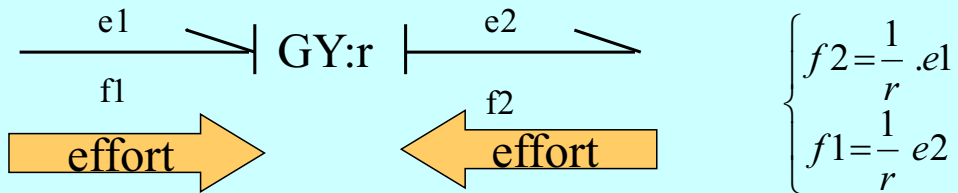
Règle : Il n'y a qu'une seule barre de causalité auprès du TF.

Gyrateur

Premier cas



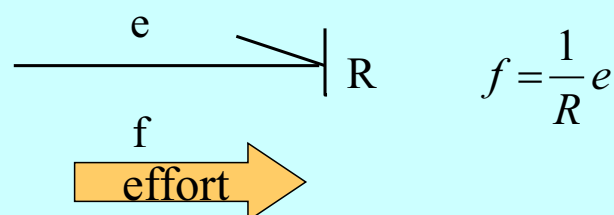
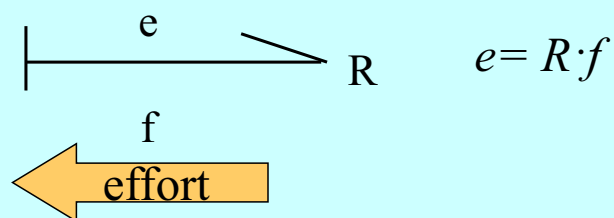
Second cas



Règle : Il y a 2 ou aucune barre(s) de causalité auprès du GY.

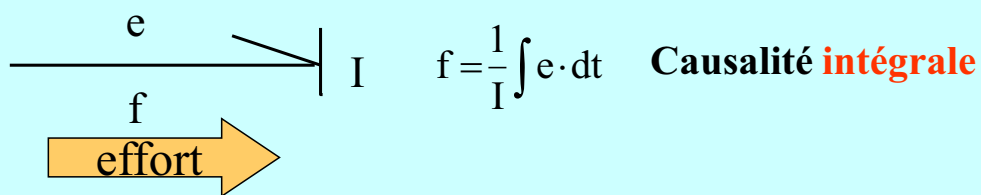
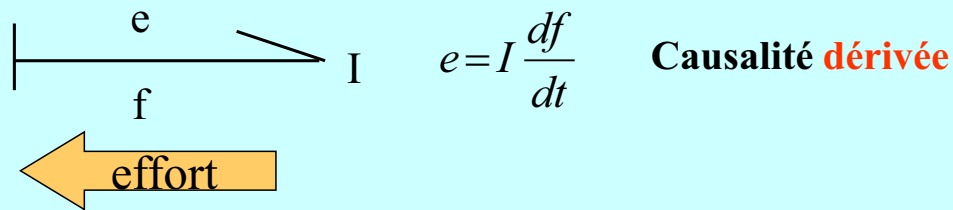
Résistance

Deux types de causalités sont possibles :



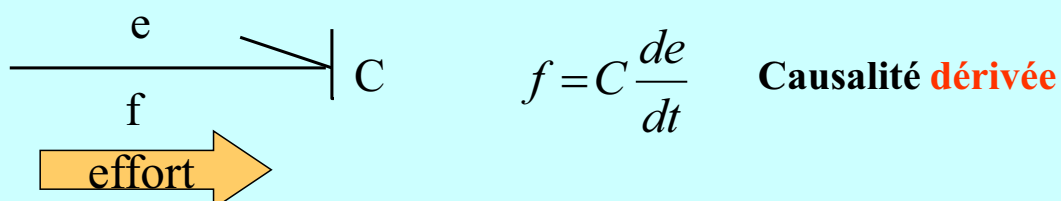
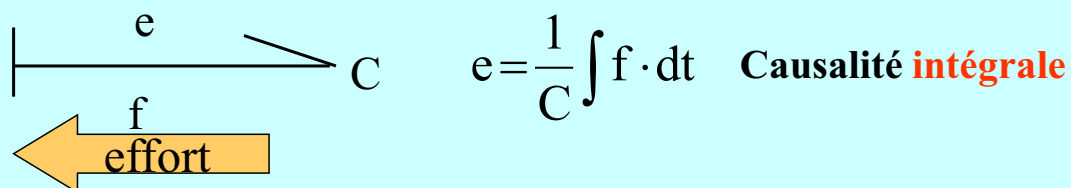
Inductance

Deux types de causalités sont possibles :



Capacité

Deux types de causalités sont possibles :



Remarques

Il est souhaitable d'obtenir les équations sous la forme : $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{e}, t)$

qui conduit à l'implémentation : $\underline{x}(t) = \int_0^t f(\underline{x}, \underline{e}, t) . dt$

C'est une équation différentielle ordinaire (ODE). On utilise alors une **méthode d'intégration explicite**, comme par exemple celle de Runge Kutta.

Lorsque certains éléments restent en causalité dérivée, nous aurons les équations de la forme :

$$g(\dot{\underline{x}}, \underline{x}, \underline{e}, t) = 0$$

Les **méthodes d'intégration** qui en résultent sont dites **implicites**. Elles sont plus délicates à utiliser.

III PROPAGATION DE LA CAUSALITÉ

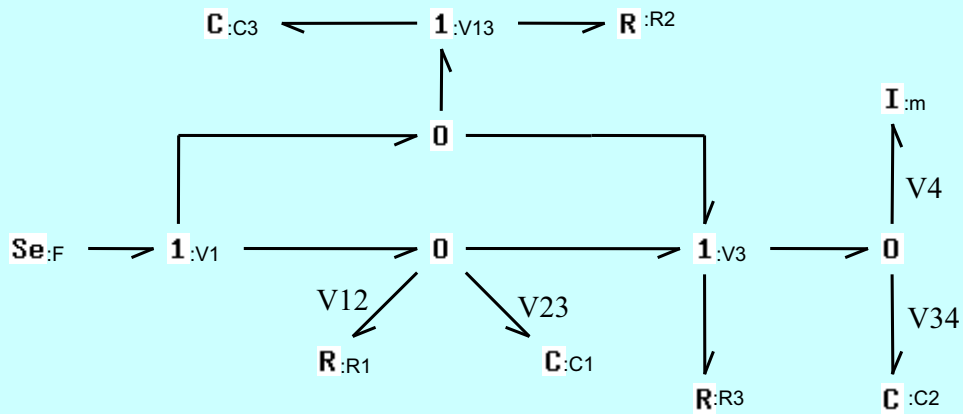
Règles de propagation

- 1) Affecter les causalités imposées par les sources.
- 2) Mettre les éléments I et C en causalité intégrale.
- 3) Propager les causalités aux jonctions, aux transformateurs et aux gyrateurs.
- 4) Affecter les causalités aux éléments R.
- 5) Si un conflit de causalité apparaît sur une jonction, changer une causalité intégrale en une causalité dérivée et reprendre en 3.

II - Causalité

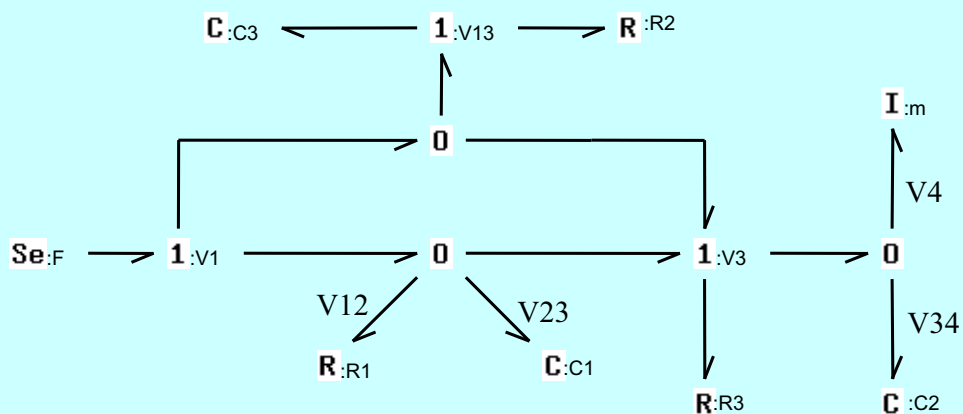
Exemple

- Etape 1 : Affecter les causalités imposées par les sources.



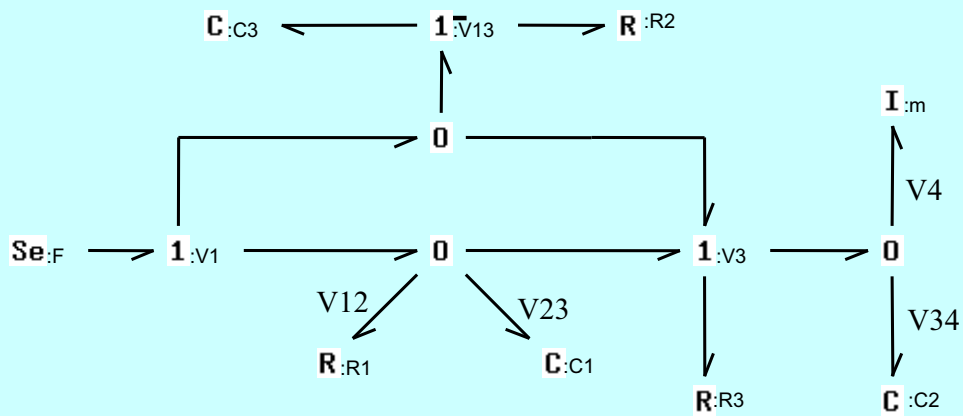
II - Causalité

- Etape 2 : Mettre les éléments I et C en causalité intégrale.



II - Causalité

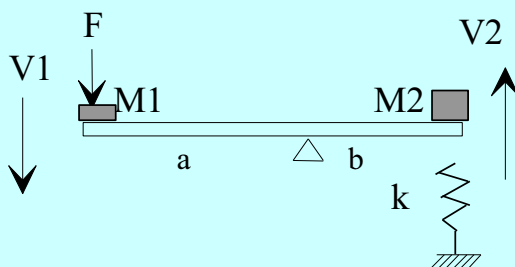
• Etape 3 : Propager les causalités



II - Causalité

V. CAUSALITÉ MIXTE

Inertie du levier négligeable et une masse à chaque extrémité.

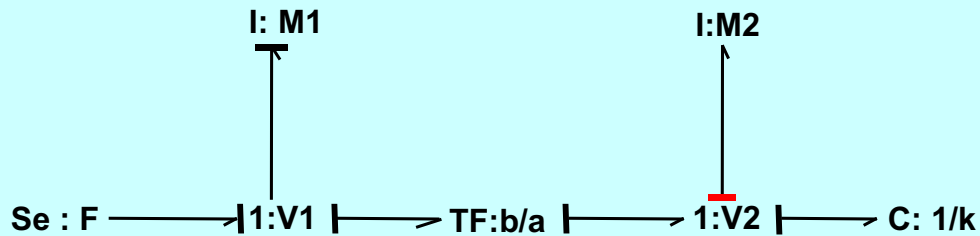


$$\frac{V2}{V1} = \frac{b}{a}$$

Deux causalités sont possibles

II - Causalité

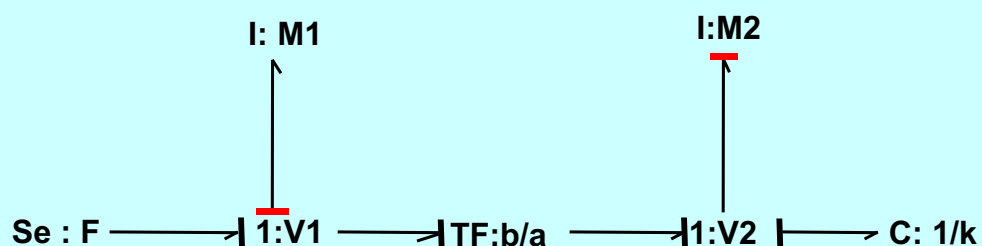
Première causalité possible



I:M2 est en causalité **dérivée!**

II - Causalité

Seconde causalité possible

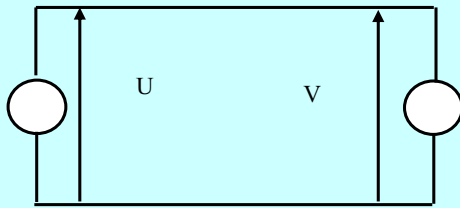


I:M1 est en causalité **dérivée!**

NB : On pourrait supprimer l'élément en causalité dérivée en introduisant de la flexibilité sur le bras de levier. La **causalité dérivée** provient d'une **modélisation simplifiée** et peut disparaître si on modélise plus finement le système.

VI. CAUSALITÉ NON DÉFINIE

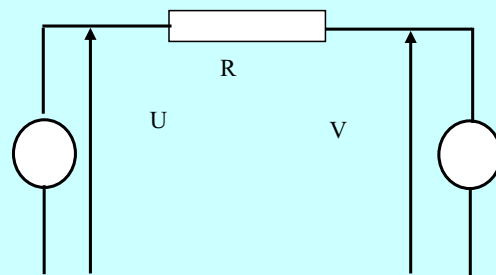
Considérons la connexion de deux batteries :



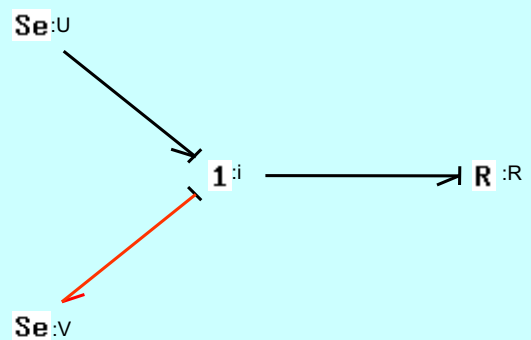
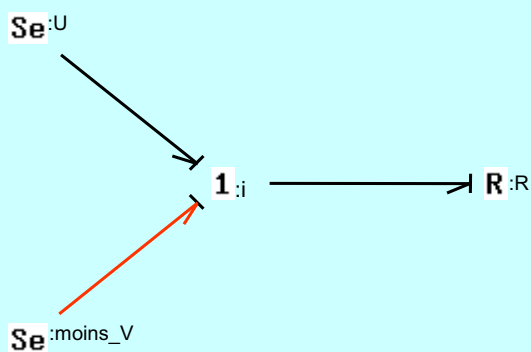
Se:U $\longrightarrow$ 1:i $\longleftarrow$ Se:-V

Conflit de causalité sur la jonction 1.
Le courant résultant n'est pas calculable,

Introduisons une résistance R:



Deux modélisations sont alors possibles :



Plus de problème de causalité, le courant se calcule par :

$$i = \frac{U - V}{R}$$

I Du BG au TRANSFERT

But:

Quelles sont les équations et les moyens de calculs associées au BG ?

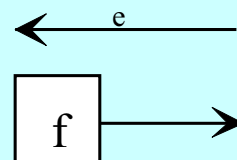
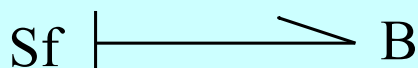
Rappel: une fonction de transfert à **une** entrée et **une** sortie.

1

Sources

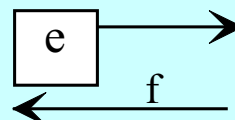
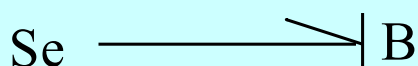
- **Source de flux**

Entrée f, sortie e



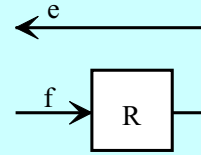
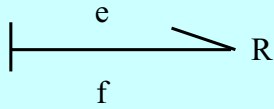
- **Source d'effort**

Entrée e, sortie f

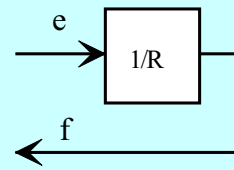
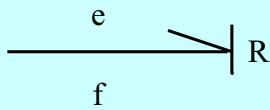


Résistance

Premier cas : entrée f , sortie e



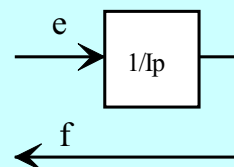
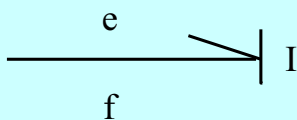
Deuxième cas : entrée e , sortie f



Inductance

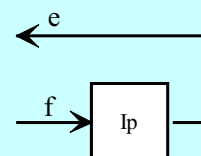
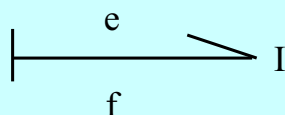
Premier cas: causalité **intégrale** (à préférer)

Entrée e , sortie f



Deuxième cas: causalité **dérivée** (à éviter)

Entrée f , sortie e

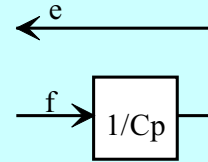
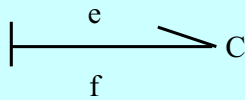


Remarque: Les éléments du BG en causalité intégrale se traduisent par des intégrateurs dans le schéma fonctionnel.

Capacité

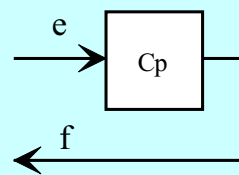
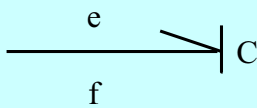
Premier cas: causalité **intégrale** (à préférer)

Entrée f , sortie e



Deuxième cas: causalité **dérivée** (à éviter)

Entrée e , sortie f



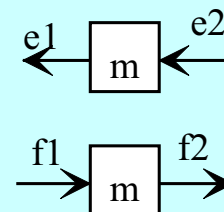
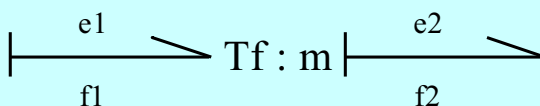
Remarque: Les éléments du BG en causalité intégrale se traduisent par des intégrateurs dans le schéma fonctionnel.

Transformateur

Premier cas:

Effort d'entrée e_2 , effort de sortie e_1

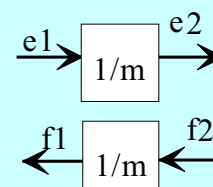
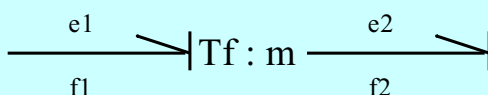
Flux d'entrée f_1 , flux de sortie f_2



Deuxième cas:

Effort d'entrée e_1 , effort de sortie e_2

Flux d'entrée f_2 , flux de sortie f_1

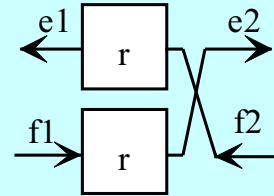


Gyrateur

Premier cas:

Flux en entrée f_1, f_2

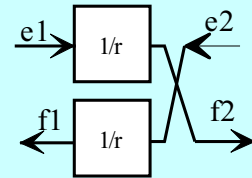
Efforts en sortie e_1, e_2



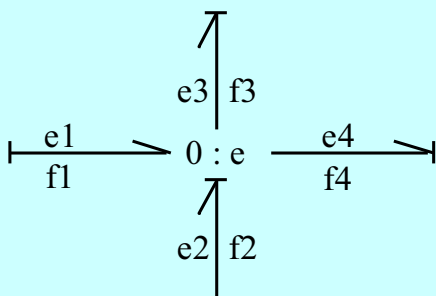
Deuxième cas:

Efforts en entrée e_1, e_2

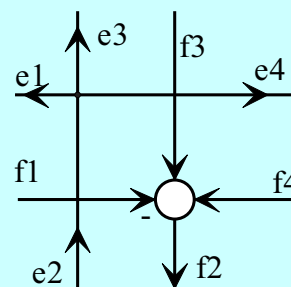
Flux en sortie f_1, f_2



Jonction 0



Entrée e_2 et sortie f_2 .

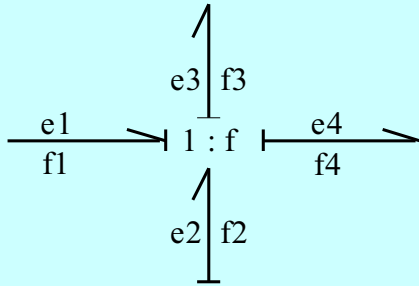


$$e_1 = e_3 = e_4 = \{e_2\}$$

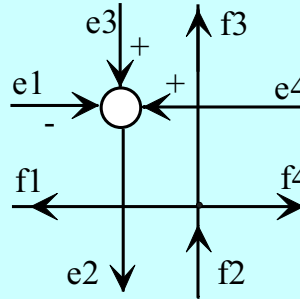
$$f_2 = -f_1 + f_3 + f_4$$

Remarque: Attention au(x) signe(s) !

Jonction 1



Entrée f_2 et sortie e_2 .



$$f_1 = f_3 = f_4 = \{f_2\}$$

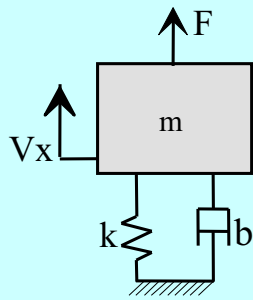
$$e_2 = -e_1 + e_3 + e_4$$

Remarque: Attention au(x) signe(s) !

Obtention de la fonction de transfert

1. Changer les liens du BG en deux signaux (flux, effort).
2. Remplacer chaque jonction 1 (respectivement jonction 0) en une somme algébrique d'efforts (respectivement de flux).
3. En tenant compte de la causalité, remplacer chaque composant par la fonction de transfert correspondante.
4. Réorganiser le schéma fonctionnel obtenu pour placer la variable d'entrée à gauche et la variable de sortie à droite.
5. Simplifier le schéma fonctionnel.
6. Calculer la fonction de transfert.

Exemple mécanique



Calcul de : $\frac{V_x(p)}{F(p)}$

1. Changer les liens du BG en deux signaux (flux, effort).

III - Équations déduites du Bond Graph

2. Remplacer chaque jonction 1 en une somme algébrique d'efforts
3. Remplacer chaque composant par la fonction de transfert correspondante.
4. Placer la variable d'entrée à gauche et la variable de sortie à droite.

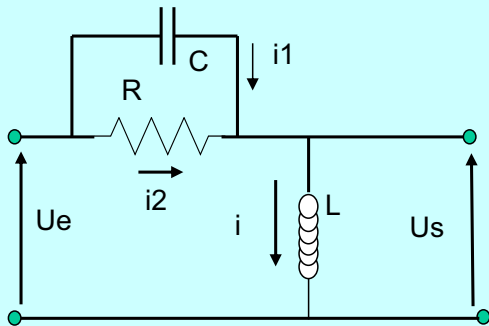
III - Équations déduites du Bond Graph

5. Simplifier le schéma fonctionnel.
6. Calculer la fonction de transfert.

Remarque

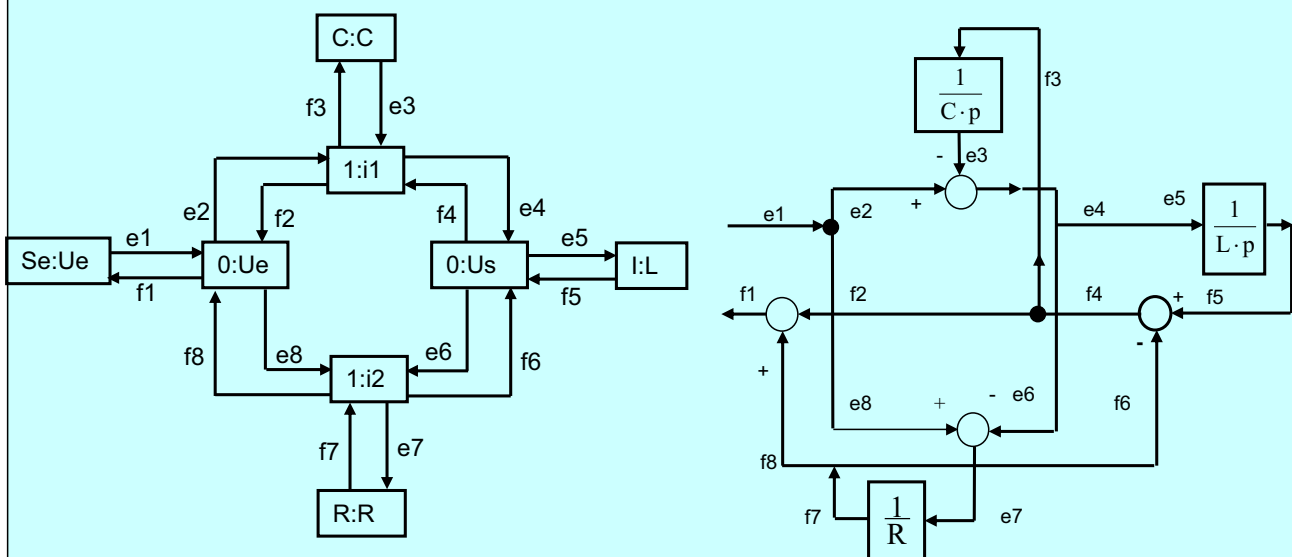
Le schéma fonctionnel traduit les relations de cause à effet entre les différents éléments. Ainsi, la notion de causalité est véhiculée par le sens des signaux qui entrent et sortent de chacun des blocs de transfert.

Exemple électrique



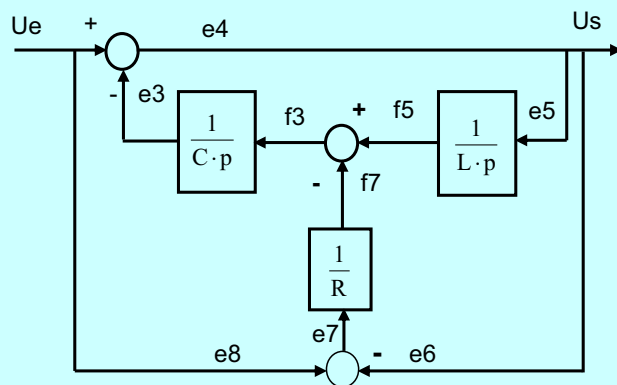
$\frac{1}{R}$

Ce Bond Graph se traduit par :

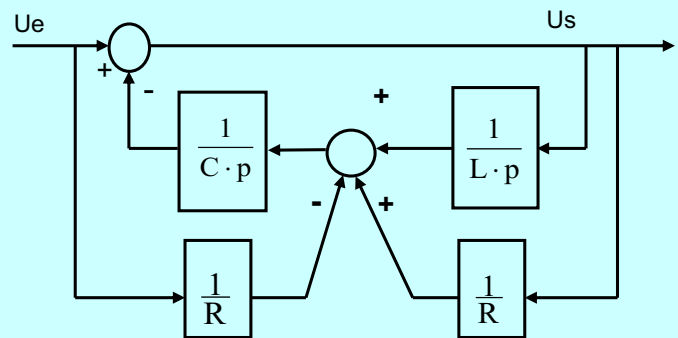


III - Équations déduites du Bond Graph

Nouvelle organisation des blocs:



Déplaçons le terme $1/R$ et combinons les deux sommateurs :



III - Équations déduites du Bond Graph

Regroupons et simplifions:

Conclusion

$$\frac{U_s(p)}{U_e(p)} = \frac{(1 + R \cdot C \cdot p) \cdot L \cdot p}{R + L \cdot p + R \cdot L \cdot C \cdot p^2}$$

II DU BG A LA RÉPRÉSENTATION D'ÉTAT

Vecteur d'état

Le vecteur d'état est composé des variables d'énergie p_I et q_C associées aux éléments I et C du BG.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} p_I \\ q_C \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} e_I \\ f_C \end{bmatrix} \quad (2)$$

Propriétés :

- a) Si tous les éléments sont en causalité intégrale, la dimension du vecteur d'état est égale au nombre des éléments I et C .
- b) Si parmi les n éléments I et C il en existe m en causalité dérivée, alors la dimension du vecteur d'état est $n-m$.

Méthode pour obtenir la représentation d'état

- 1) compte tenu des causalités, écrire les lois associées aux jonctions
- 2) compte tenu des causalités, écrire les lois caractéristiques des éléments
- 3) à partir de ces équations, expliciter les dérivées des variables d'état en fonction des variables d'état ($\underline{x}$) et du vecteur des entrées ($\underline{u}$)
- 4) définir le vecteur des variables mesurées ($\underline{y}$).

Cas général :
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) \\ \underline{y} = g(\underline{x}, \underline{u}) \end{cases}$$

Cas linéaire :
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + B \cdot \underline{u} \\ \underline{y} = C \cdot \underline{x} + D \cdot \underline{u} \end{cases}$$

A: Matrice d'état
 B: Matrice de commande
 C: Matrice d'observation
 D: Matrice de liaison directe

Exemple mécanique

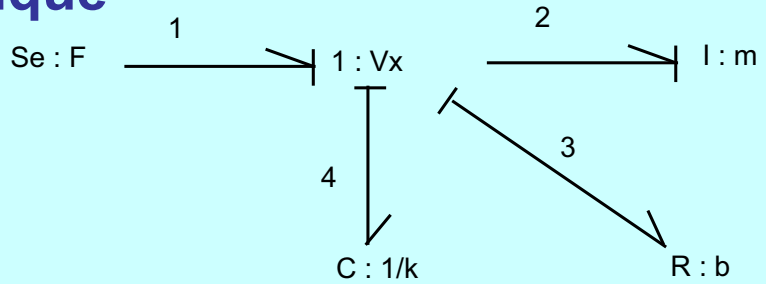
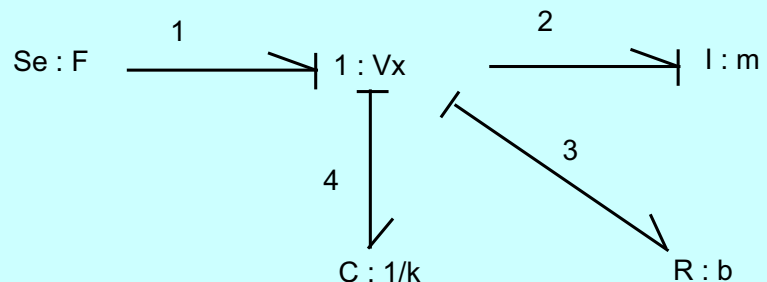


Tableau des équations ($\{\}$ indique que la variable s'impose)

Jonction 1:Vx $\begin{cases} e_2 = e_1 - e_3 - e_4 \\ f_1 = f_3 = f_4 = \{f_2\} \end{cases} \quad (3)$	Élément I:m $\begin{cases} \dot{p}_2 = e_2 \\ f_2 = \frac{1}{m} \cdot p_2 = V_x \end{cases} \quad (5)$
Élément C:1/k $\begin{cases} e_4 = k \cdot q_4 \\ \dot{q}_4 = f_4 \end{cases} \quad (4)$	Élément R:b $e_3 = b \cdot f_3 \quad (6)$

Vecteur d'état



Le BG possède deux éléments (I et C) en causalité intégrale, le vecteur d'état comporte deux composantes : donc $\dim(\underline{x}) = 2$.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

Obtention de la représentation d'état

Il faut exprimer les dérivées $\dot{p}_2$ et $\dot{q}_4$ en fonction des variables d'état et de l'entrée F .

Obtention de la représentation d'état (suite)

Regroupons :

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_2 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{m} & -k \\ \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_2 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F$$

Si on mesure la vitesse V_x , la sortie est :

$$y = V_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}$$

De la représentation d'état à la fonction de transfert

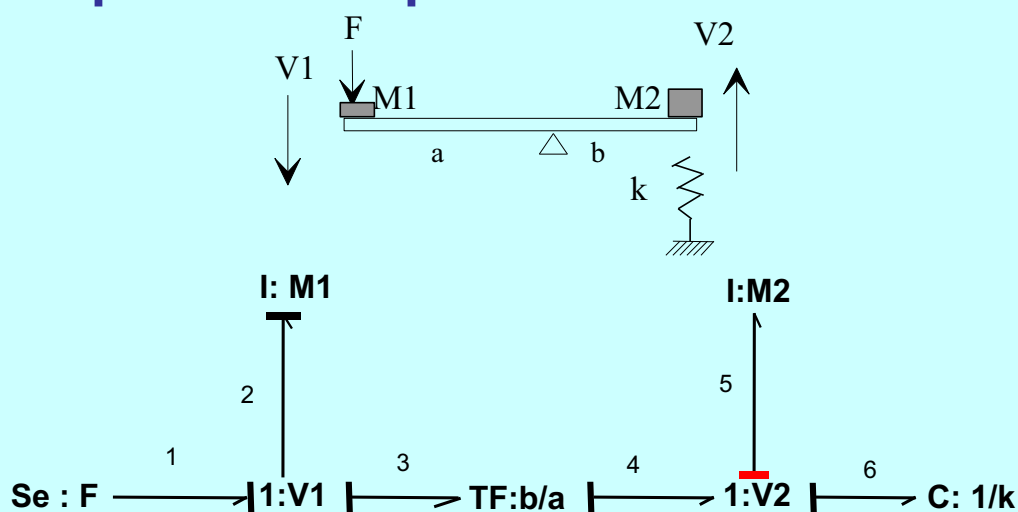
La fonction de transfert se calcule par :

$$H(p) = C \cdot (p \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D$$

Nous obtenons donc, comme précédemment:

$$\frac{V_x(p)}{F(p)} = \frac{p}{m \cdot p^2 + b \cdot p + k}$$

Exemple mécanique de causalité mixte



2 éléments en causalité intégrale, donc: $\underline{x} = \begin{bmatrix} p2 \\ q6 \end{bmatrix}$

Pour 1 élément en causalité dérivée, son «état» **dépend** des autres composantes du vecteur d'état. Ici, $p5$ **dépend** de $p2$ et $q6$

III - Équations déduites du Bond Graph

Jonction 1:V1

(25)

Jonction 1:V2

(26)

Élément C:1/k

(27)

Transformateur TF

$$\begin{cases} e3 = \frac{b}{a} e4 \\ f4 = \frac{b}{a} \cdot f3 \end{cases} \quad (28)$$

Élément I:M1

(29)

Élément I:M2

(30)

III - Équations déduites du Bond Graph

p5 dépend de p2.

III - Équations déduites du Bond Graph

Calcul de la dérivée de p_2 .

III - Équations déduites du Bond Graph

Calcul de la dérivée de q_6 .

Finalement :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \cdot k \\ 1 + \frac{M2}{M1} \cdot \frac{b^2}{a^2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{M2}{M1} \cdot \frac{b^2}{a^2} \end{bmatrix} \cdot F$$

Si on mesure V2 :

$$y = \begin{bmatrix} \frac{b}{a \cdot M1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}$$

Conclusion :

Nous avons obtenu le modèle final par une résolution algébrique.

De plus, dans le cas général, les équations constitutives des éléments R, I, C sont généralement non linéaires : l'élimination algébrique n'est pas toujours faisable.

On obtient alors un ensemble d'équations différentielles associées aux éléments en causalité intégrale et un ensemble d'équations algébriques (ou contraintes) associées aux éléments en causalité dérivées.

Modélisation de système dynamiques
multi-physiques par Bond Graphs

- 4 -

Systèmes mécaniques élémentaires

Modélisation de système dynamiques
multi-physiques par Bond Graphs

- 4 -

Systèmes mécaniques élémentaires

I) Généralités

I- Généralités

Variable	Translation	Rotation
<i>Effort e</i>	<i>Force F (N)</i>	<i>Couple Γ (N.m)</i>
<i>Flux f</i>	<i>Vitesse V (m/s)</i>	<i>Vitesse angulaire ω (rad/s)</i>
<i>Moment généralisé p</i>	<i>Moment ou quantité de mouvement (N.s)</i> $p(t) = \int_0^t F(\tau) d\tau$	<i>Moment cinétique (N.m.s)</i> $H(t) = \int_0^t \Gamma(\tau) d\tau$
<i>Déplacement généralisé q</i>	<i>Déplacement (m)</i> $x(t) = \int_0^t V(\tau) d\tau$	<i>Angle θ (rad)</i> $\theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$

I - Généralités

Procédure systématique de construction des BG pour les systèmes mécaniques élémentaires

- 1) Choisir un **repère** pour chaque corps considéré.
- 2) Matérialiser chaque vitesse par une **jonction 1** et la nommer.
- 3) Construire à l'aide des **jonctions 0** les relations entre les vitesses.
- 4) Connecter les éléments **I, R, C** aux jonctions.
- 5) Placer les **sources**.
- 6) **Simplifier** le BG si possible.

I - Généralités

Obtention des équations de la représentation d'état

En tenant compte de la **causalité**:

- 1) Equations associées aux **jonctions**.
- 2) Lois caractéristiques des **éléments**.
- 3) **Vecteur d'état**: pour les éléments en **causalité intégrale**, le vecteur d'état et sa dérivée sont choisis tels que

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{p}_I \\ \underline{q}_C \end{bmatrix} \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \underline{e}_I \\ \underline{f}_C \end{bmatrix}$$

- 4) **Dérivées des variables d'état** en fonction des variables d'état et des entrées.

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}} = A \cdot \underline{x} + B \cdot \underline{u} \\ \underline{y} = C \cdot \underline{x} + D \cdot \underline{u} \end{cases}$$

A: Matrice d'état

B: Matrice de commande

C: Matrice d'observation

D: Matrice de liaison directe

Modélisation de système dynamiques multi-physiques par Bond Graphs

- 4 -

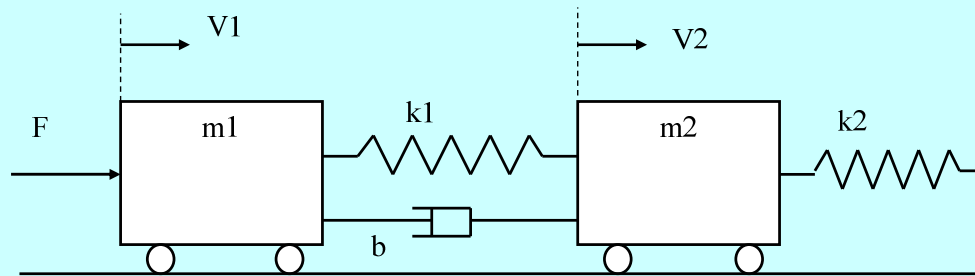
Systèmes mécaniques élémentaires

II) Translation

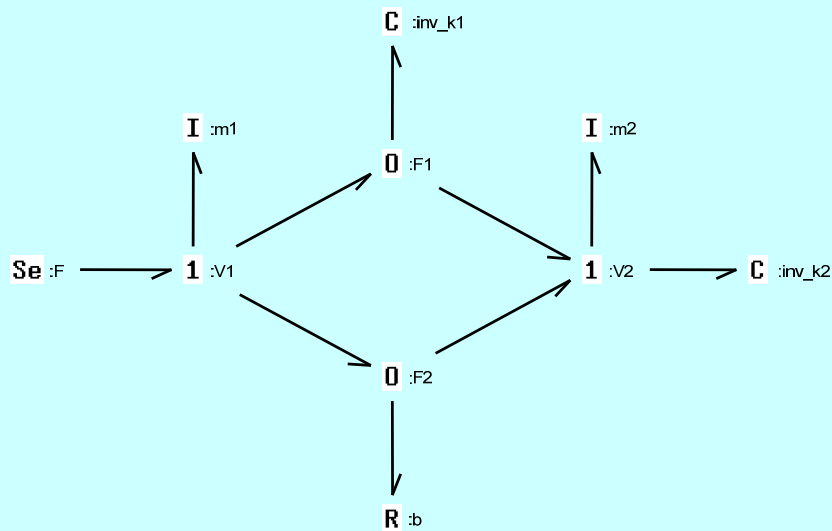
II- Translation

Translation

Exemple 1: Détermination de la fonction de transfert



II -Translation



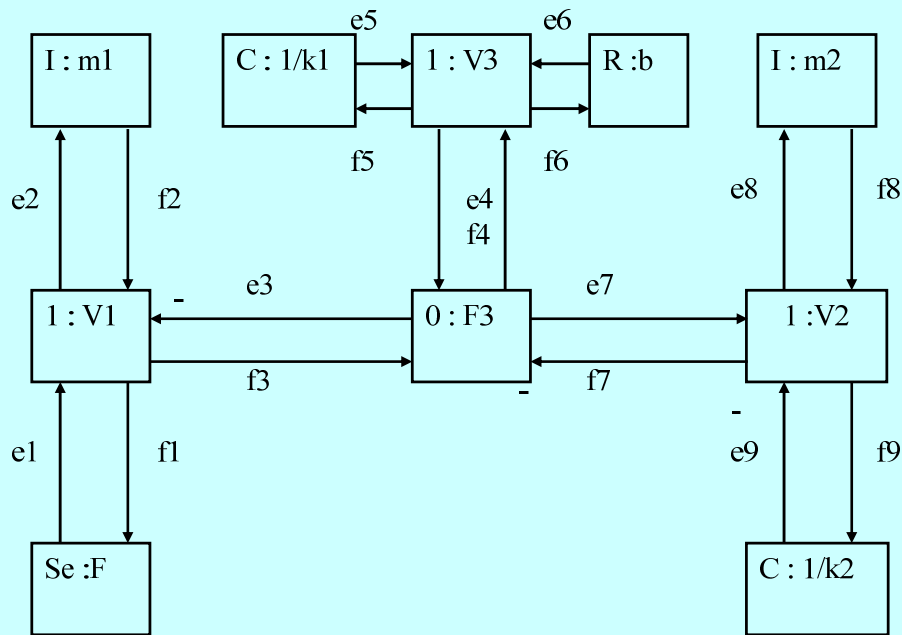
Analyse du système:

Simplifications

Causalité

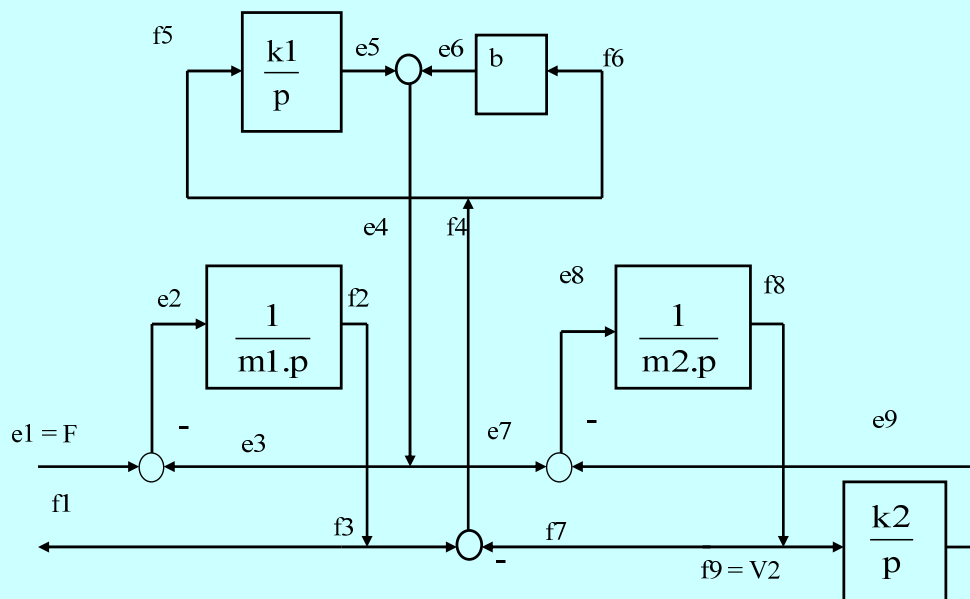
II -Translation

Blocs



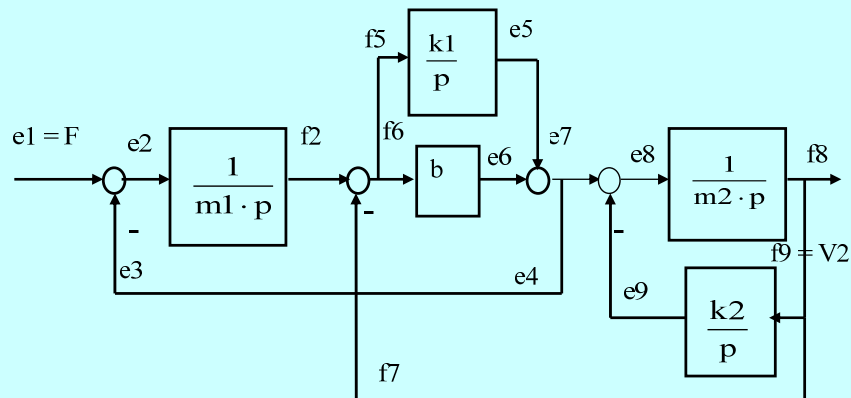
II -Translation

Schéma-blocs



II -Translation

Réorganisation

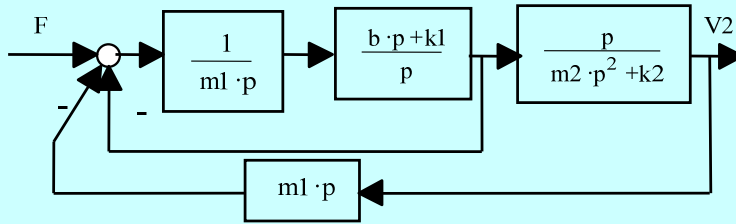


II -Translation

Réorganisation

II -Translation

Réorganisation (suite)



$$\frac{V2(p)}{F(p)} = \frac{p \cdot (k1 + b \cdot p)}{(m1 \cdot p^2 + b \cdot p + k1) \cdot (m2 \cdot p^2 + k2) + m1 \cdot p^2 \cdot (k1 + b \cdot p)}$$

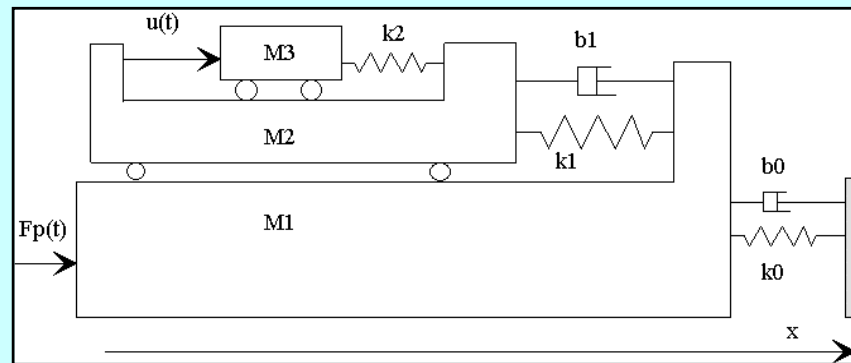
II -Translation

Réorganisation (suite)

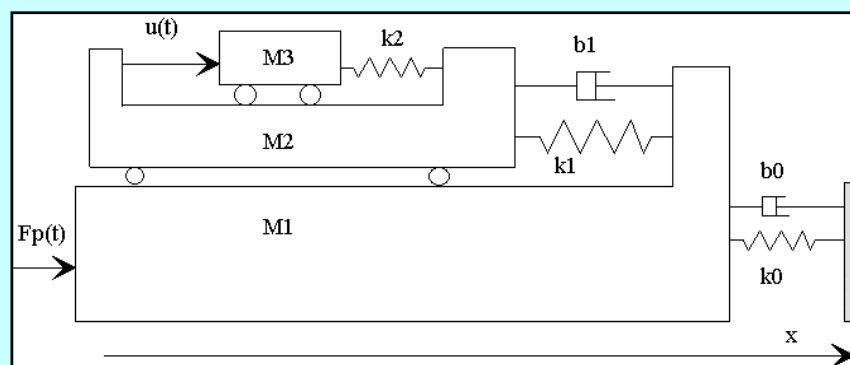
$$\frac{V2(p)}{F(p)} = \frac{p \cdot (k1 + b \cdot p)}{(m1 \cdot p^2 + b \cdot p + k1) \cdot (m2 \cdot p^2 + k2) + m1 \cdot p^2 \cdot (k1 + b \cdot p)}$$

II - Translation

Exemple 2: Détermination de la représentation d'état



II - Translation

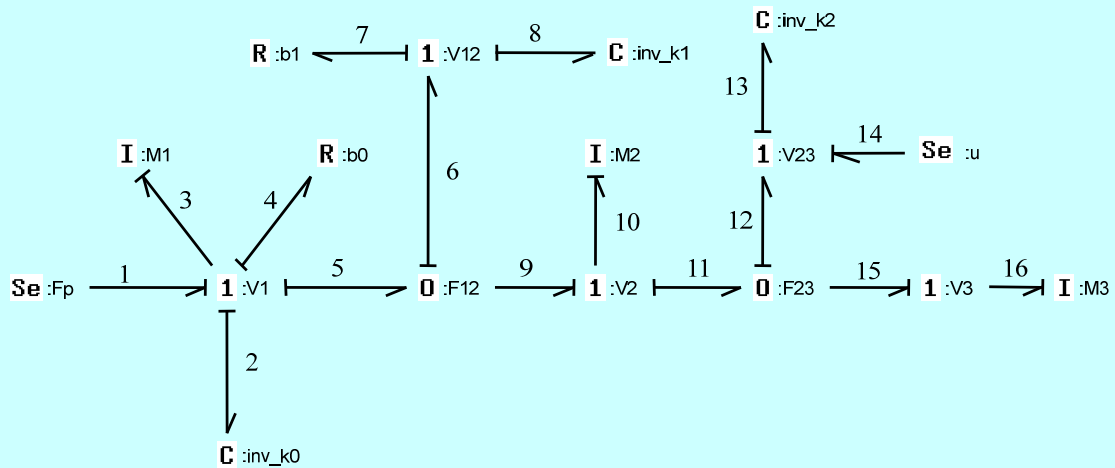


Analyse du système:

II - Translation

Bond Graph

- Le ressort C:1/k2 est soumis à la différence des vitesses V23.
- Le ressort C:1/k1 et le frottement visqueux R:b1 sont soumis à la différence de vitesses V12.
- Le ressort C:1/k0 et le frottement visqueux R:b0 sont soumis à la vitesse V1.
- Les inerties I:Mj sont directement reliées aux vitesses Vj.



II - Translation

Tableau des relations

Jonction 1:V1 { (1)	Élément I:M2 { (9)
Jonction 1:V12 { (2)	Élément I:M3 { (10)

II - Translation

Jonction 1:V2 $\begin{cases} f_9 = f_{11} = \{f_{10}\} \\ e_{10} = e_9 - e_{11} \end{cases} \quad (3)$ Jonction 1:V23 $\begin{cases} f_{13} = f_{14} = \{f_{12}\} \\ e_{12} = e_{13} + e_{14} \end{cases} \quad (4)$ Jonction 1:V3 $\begin{cases} f_{15} = \{f_{16}\} \\ e_{16} = e_{15} \end{cases} \quad (5)$ Jonction 0:F12 $\begin{cases} e_5 = e_9 = \{e_6\} \\ f_6 = f_5 - f_9 \end{cases} \quad (6)$ Jonction 0:F23 $\begin{cases} e_{11} = e_{15} = \{e_{12}\} \\ f_{12} = f_{11} - f_{15} \end{cases} \quad (7)$ Élément I:M1 $\begin{cases} p_3 = e_3 \\ f_3 = \frac{1}{M1} p_3 \end{cases} \quad (8)$	Élément C:1/k0 $\begin{cases} e_2 = k_0 \cdot q_2 \\ q_2 = f_2 \end{cases} \quad (11)$ Élément C:1/k1 $\begin{cases} e_8 = k_1 \cdot q_8 \\ q_8 = f_8 \end{cases} \quad (12)$ Élément C:1/k2 $\begin{cases} e_{13} = k_2 \cdot q_{13} \\ q_{13} = f_{13} \end{cases} \quad (13)$ Élément R:b0 $e_4 = b_0 \cdot f_4 \quad (14)$ Élément R:b1 $e_7 = b_1 \cdot f_7 \quad (15)$
--	---

II - Translation

Choix du vecteur d'état

- **Six éléments** de stockage d'énergie (I ou C) **en causalité intégrale**.
- Donc le **système est d'ordre 6**.

$$\underline{x} = [q_2 \quad p_3 = M1 \cdot V1 \quad q_8 \quad p_{10} = M2 \cdot V2 \quad q_{13} \quad p_{16} = M3 \cdot V3]^T$$

Remarques:

- Pour les **ressorts**, les **déplacements généralisés** q représentent physiquement **l'élongation** x du ressort
- Pour les **masses**, les **moments généralisés** sont proportionnels à la **vitesse** de la masse.

II - Translation

Dérivées des variables d'état en fonction des variables d'état et des entrées

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + B \cdot \underline{u} \\ \underline{y} = C \cdot \underline{x} + D \cdot \underline{u} \end{cases}$$

- **Élément C : 1/k0**

En tenant compte de (11, 1, 8), il vient :

$$\dot{q}_2 = f_2 = f_3 = \frac{1}{Ml} \cdot p_3$$

- **Élément I : M1**

$$\dot{p}_3 = e_3 = Fp - e_2 - e_4 - e_5 \quad \text{d'après (8 et 1)}$$

$$\dot{p}_3 = Fp - k_0 \cdot q_2 - b_0 \cdot f_3 - e_7 - e_8 \quad \text{d'après (11, 14, 8, 6, 2)}$$

En tenant compte de (8, 15, 12), il vient

$$\dot{p}_3 = Fp - k_0 \cdot q_2 - \frac{b_0}{Ml} p_3 - b_l \cdot f_7 - k_l \cdot q_8$$

II - Translation

Calculons le produit $b_l \cdot f_7$

$$b_l \cdot f_7 = b_l \cdot f_6 = b_l \cdot (f_5 - f_9) \quad \text{d'après (2, 6)}$$

$$b_l \cdot f_7 = b_l \cdot (f_3 - f_{10}) \quad \text{d'après (1, 3)}$$

$$b_l \cdot f_7 = \frac{b_l}{Ml} \cdot p_3 - \frac{b_l}{M2} \cdot p_{10} \quad \text{d'après (8, 9)}$$

Finalement :

$$b_l \cdot f_7 = \frac{b_l}{Ml} \cdot p_3 - \frac{b_l}{M2} \cdot p_{10}$$

Donc la relation encadrée page précédente devient :

$$\dot{p}_3 = Fp - k_0 \cdot q_2 - \frac{b_0 + b_l}{Ml} \cdot p_3 - k_l \cdot q_8 + \frac{b_l}{M2} \cdot p_{10}$$

II - Translation

Élément C:1/k1

$$\dot{q}_8 = f_8 = f_6 = f_5 - f_9 \quad \text{d'après (12, 2, 6)}$$

$$\dot{q}_8 = f_3 - f_{10} = \frac{1}{M1} \cdot p_3 - \frac{1}{M2} \cdot p_{10} \quad \text{d'après (3, 8, 9)}$$

Finalement :

$$\dot{q}_8 = \frac{1}{M1} \cdot p_3 - \frac{1}{M2} \cdot p_{10}$$

Élément I:M2

$$\dot{p}_{10} = e_{10} = e_9 - e_{11} \quad \text{d'après (9, 3)}$$

$$\dot{p}_{10} = e_6 - e_{12} = e_7 + e_8 - e_{13} + e_{14} \quad \text{d'après (6, 7, 2, 4)}$$

$$\dot{p}_{10} = b1 \cdot f_7 + k1 \cdot q_8 - k2 \cdot q_{13} - u \quad \text{d'après (15, 12, 13)}$$

Nous avons calculé $b1 \cdot f_7$ donc :

$$\dot{p}_{10} = \frac{b1}{M1} \cdot p_3 + k1 \cdot q_8 - \frac{b1}{M2} \cdot p_{10} - k2 \cdot q_{13} - u$$

II - Translation

Élément C:1/k2

$$\dot{q}_{13} = f_{13} = f_{12} = f_{11} - f_{15} \quad \text{d'après (13, 4, 7)}$$

$$\dot{q}_{13} = f_{10} - f_{16} = \frac{1}{M2} \cdot p_{10} - \frac{1}{M3} \cdot p_{16} \quad \text{d'après (3, 5, 9, 10)}$$

Finalement :

$$\dot{q}_{13} = \frac{1}{M2} \cdot p_{10} - \frac{1}{M3} \cdot p_{16}$$

Élément I:M3

$$\dot{p}_{16} = e_{16} = e_{15} = e_{12} = e_{13} - e_{14} \quad \text{d'après (10, 5, 7, 4)}$$

$$\dot{p}_{16} = k2 \cdot q_{13} + u \quad \text{d'après (13)}$$

Par conséquent :

$$\dot{p}_{16} = k2 \cdot q_{13} + u$$

II - Translation

Représentation matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{p}_3 \\ \dot{q}_8 \\ \dot{p}_{10} \\ \dot{q}_{13} \\ \dot{p}_{16} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k0 & -\frac{b0+b1}{M1} & -k1 & \frac{b1}{M2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M1} & 0 & -\frac{1}{M2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b1}{M1} & k1 & -\frac{b1}{M2} & -k2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M2} & 0 & -\frac{1}{M3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k2 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{A: Matrice d'état}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_2 \\ p_3 \\ q_8 \\ p_{10} \\ q_{13} \\ p_{16} \end{bmatrix}}_{\text{B: Matrice de commande}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ Fp \end{bmatrix}$$

A: Matrice d'état

B: Matrice
de commande

II - Translation

Conclusion

Deux façons d'obtenir les équations à partir d'un Bond Graph

- 1) Le **schéma bloc**, simple pour les systèmes d'ordre peu élevé.
- 2) La **méthode algébrique**, applicable quelque soit l'ordre du système.

Modélisation de système dynamiques multi-physiques par Bond Graphs

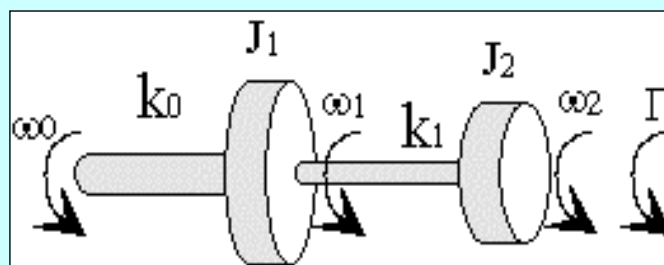
- 4 -

Systèmes mécaniques élémentaires

III) Rotation

III - Rotation

Exemple 1

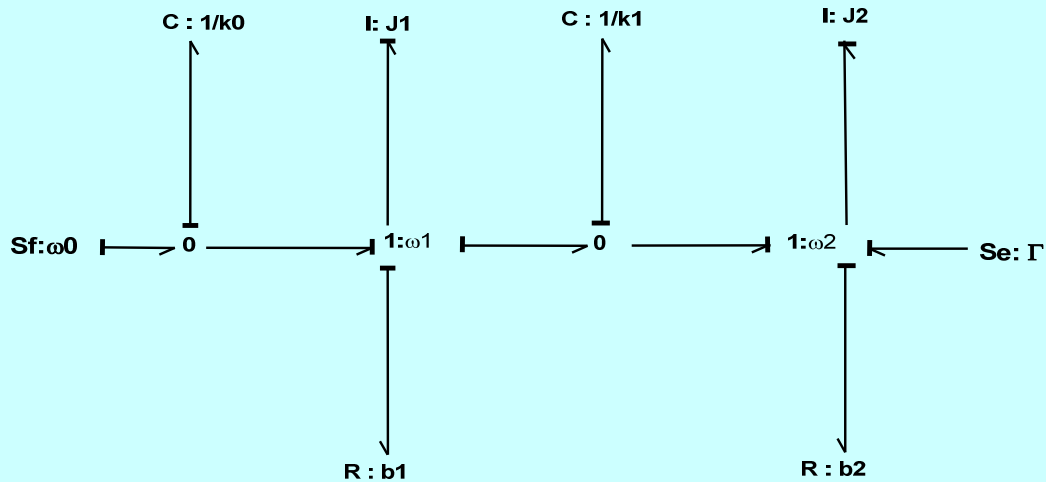


Analyse du système:

- 2 inerties $\Rightarrow$ 2 vitesses de rotation ω_1 et $\omega_2 \Rightarrow$ 2 jonctions 1
- L'arbre intermédiaire, de raideur k_1 , est soumis aux différences de vitesses $\Rightarrow$ jonction 0 reliée à l'élément C : $1/k_1$.
- Source de couple appliquée sur l'inertie $J_2 \Rightarrow S_e$
- Source de vitesse appliquée sur l'arbre de raideur $k_0 \Rightarrow S_f$

III - Rotation

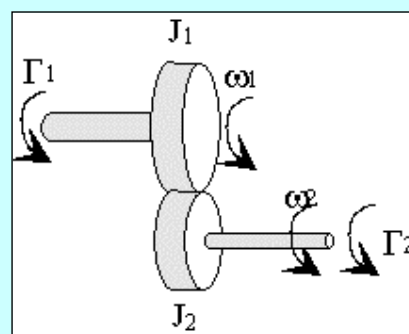
Bond Graph



Remarque: Si la raideur k_1 est infinie, il faut supprimer l'élément $C: 1/k_1$ dans le BG. Dans ce cas les deux inerties $I: J_1$ et $I: J_2$ seraient en causalité mixte. Il existerait donc une relation algébrique entre les 2 vitesses ω_1 et ω_2 .

III - Rotation

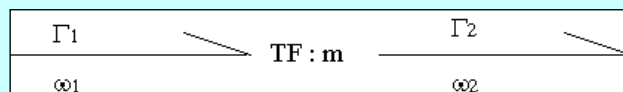
Exemple 2 : Engrenage



Modélisation de l'engrenage:

- r_1 et r_2 : rayons des roues 1 et 2
- N_1 et N_2 : nombre de dents des roues 1 et 2

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{m}$$



III - Rotation

Analyse du système:

- 2 inerties $\Rightarrow$ 2 vitesses de rotation ω_1 et $\omega_2 \Rightarrow$ 2 jonctions 1
- Source de couple appliquée sur l'inertie $J_1 \Rightarrow S_e$
- Représentation de l'engrenage comme un transformateur

Bond Graph:

Remarque: J_2 est en causalité dérivée. Cela traduit le lien existant entre ω_1 et ω_2 . Donc, seule l'une des vitesses fera partie du vecteur d'état.

III - Rotation

Tableau des relations

Jonction 1:ω_1 $\begin{cases} f_1 = f_3 = f_4 = \{f_2\} \\ e_2 = e_1 - e_4 - e_3 \end{cases} \quad (1)$	Élément I:J_1 $\begin{cases} \dot{p}_2 = e_2 \\ f_2 = \frac{1}{J_1} p_2 \end{cases} \quad (5)$
Jonction 1:ω_2 $\begin{cases} f_7 = f_8 = f_6 = \{f_5\} \\ e_5 = e_6 + e_7 + e_8 \end{cases} \quad (2)$	Élément I:J_2 $\begin{cases} e_6 = \dot{p}_6 \\ p_6 = J_2 \cdot f_6 \end{cases} \quad (6)$
Transformateur $\begin{cases} e_4 = m \cdot e_5 \\ f_5 = m \cdot f_4 \end{cases} \quad (3)$	Élément R:b_1 $e_3 = b_1 \cdot f_3 \quad (7)$
Jonction 0 $\begin{cases} e_3 = e_7 = \{e_4\} \\ f_4 = f_7 - f_3 \end{cases} \quad (4)$	Élément R:b_2 $e_8 = b_2 \cdot f_8 \quad (8)$
	Élément R:b $e_7 = b \cdot f_7 \quad (9)$

III - Rotation

Choix du vecteur d'état

- **Un élément** de stockage d'énergie (I ou C) **en causalité intégrale**.
- Donc le système est d'ordre 1.

$$\underline{x} = [p_2]$$

Représentation d'état (à vérifier)

$$\dot{p}_2 \left(1 + m^2 \cdot \frac{J_2}{J_1} \right) = \Gamma_1 - \frac{b_1 + m^2 \cdot (b + b_2)}{J_1} \cdot p_2$$

$$\text{Donc: } \dot{p}_2 = \frac{J_1}{J_1 + m^2 \cdot J_2} \Gamma_1 - \frac{b_1 + m^2 \cdot (b + b_2)}{J_1 + m^2 \cdot J_2} \cdot p_2$$

Remarque: Si le Bond Graph possède des éléments en causalité dérivée, il faut résoudre des équations algébriques pour obtenir la représentation d'état.

Modélisation de système dynamiques multi-physiques par Bond Graphs

- 4 -

Systèmes mécaniques élémentaires

IV) Mouvement dans le plan

IV – Mouvement dans le plan

Équations de base

- J : moment d'inertie du corps par rapport au centre de masse
- M : masse du corps étudié
- V_x, V_y : vitesse du centre de masse projetée sur les axes x et y
- F_x, F_y : somme des forces projetées sur les axes x et y .

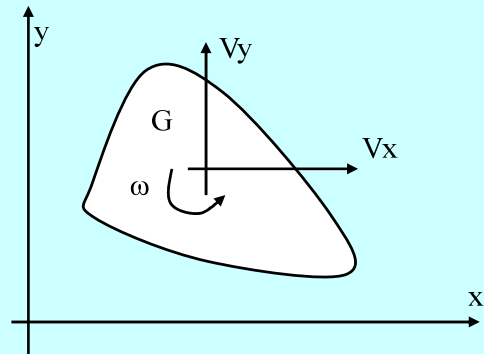
Principe fondamental de la dynamique

$$\vec{p} = M \cdot \vec{V} \quad \dot{p}_x = \sum F_x$$

$$\dot{p}_y = \sum F_y$$

Théorème du moment cinétique

$$\vec{H} = J \cdot \vec{\omega} \quad \dot{H} = \Gamma$$



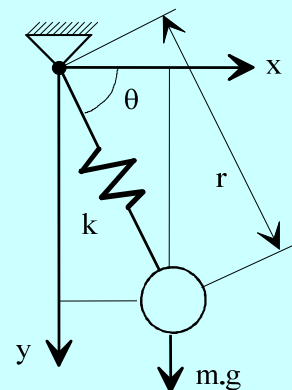
IV – Mouvement dans le plan

Exemple 1 : Pendule à bras élastique

La géométrie impose:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Il faut donc considérer 3 vitesses: V_r, V_x, V_y



$$1 : V_x \longrightarrow I : m$$

$$Se : mg \longrightarrow 1 : V_y \longrightarrow I : m$$

$$1 : V_r \longrightarrow C : 1/k$$

IV – Mouvement dans le plan

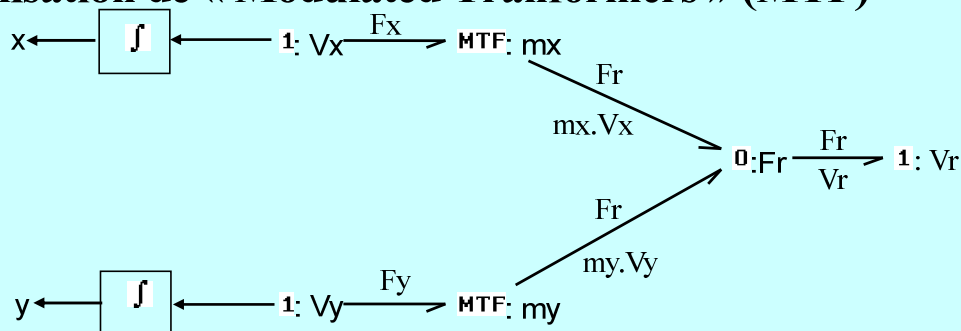
Lien entre les différentes vitesses

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$V_r = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \cdot V_x + \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \cdot V_y$$

D'où: $V_r = m_x \cdot V_x + m_y \cdot V_y$

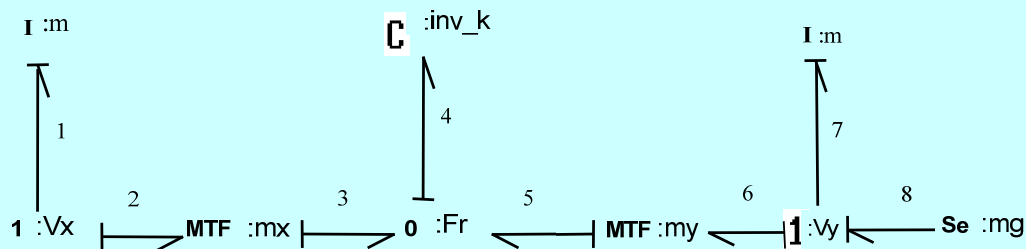
Utilisation de « Modulated Transformers » (MTF)



Remarque: Pour calculer les gains m_x et m_y des MTF, il faut obtenir les positions x et y . Nous les obtenons par **intégration** des vitesses V_x et V_y . Ces **liaisons** sont **de type signal** : d'où les flèches pleines

IV – Mouvement dans le plan

Bond Graph Global (intégrateurs non représentés)



Choix du vecteur d'état

- **Trois éléments** de stockage d'énergie (I ou C) **en causalité intégrale**.
- Mais on a besoin de x et y pour calculer les gains des MTFs
- Donc le **système est d'ordre 5**.

$$\underline{X} = [p_x \ q_r \ p_y \ x \ y]$$

IV – Mouvement dans le plan

Mise sous forme d'état

$$\dot{q}_r = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{p_x}{m} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{p_y}{m}$$

$$\dot{p}_x = - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot q_r$$

$$\dot{p}_y = - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot q_r + m \cdot g$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}$$

Remarques:

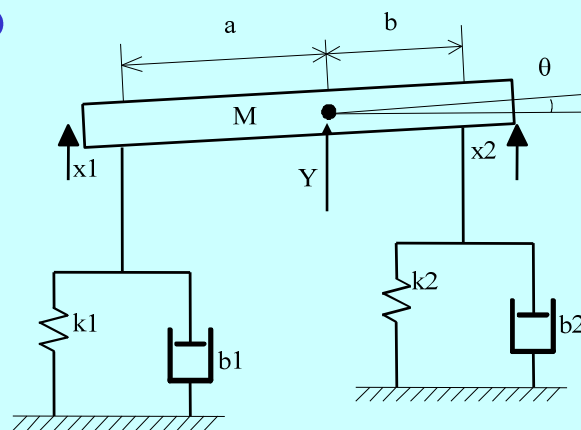
- 1) Le système possède 2 degrés de liberté. Donc le vecteur d'état doit être de dimension 4. On a ici une **représentation redondante**.
- 2) Les non-linéarités géométriques imposent l'usage de MTF ou de MGY. Elles conduisent à des **représentations d'état non linéaires**.

IV – Mouvement dans le plan

Exemple 2 : Suspension 2D

- Hypothèse: petits angles
- 4 vitesses : V_Y , ω , V_{x1} et V_{x2} .

$$\mathbf{1}:w \longrightarrow \mathbf{I}:J$$



$$\mathbf{R}:b1 \longleftarrow \mathbf{1}:V_{x1} \longrightarrow \mathbf{C}:inv_k1$$

$$\mathbf{R}:b2 \longleftarrow \mathbf{1}:V_{x2} \longrightarrow \mathbf{C}:inv_k2$$

$$\mathbf{Se}:-Mg \longrightarrow \mathbf{1}:V_Y \longrightarrow \mathbf{I}:M$$

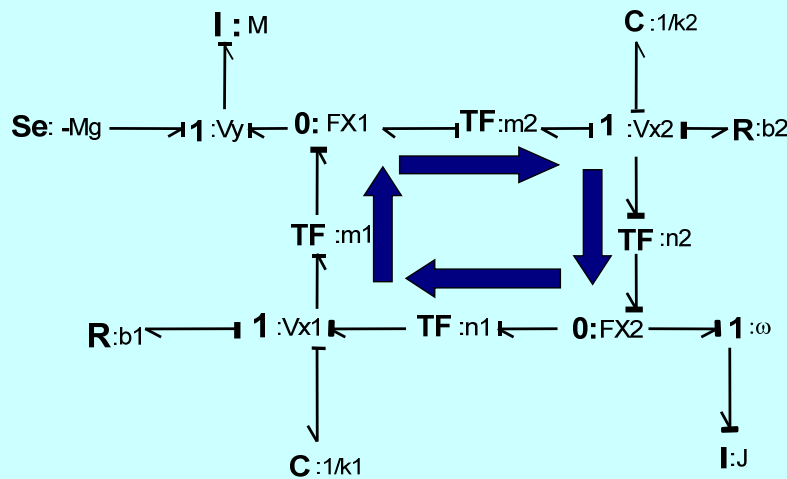
IV – Mouvement dans le plan

Première solution: expressions en fonction de V_{x1} et V_{x2}

$$V_{x1} = V_Y - a \cdot \omega \quad V_Y = \frac{b}{a+b} \cdot V_{x1} + \frac{a}{a+b} \cdot V_{x2} = m_1 \cdot V_{x1} + m_2 \cdot V_{x2}$$

$$V_{x2} = V_Y + b \cdot \omega \quad \omega = -\frac{V_{x1}}{a+b} + \frac{V_{x2}}{a+b} = -n_1 \cdot V_{x1} + n_2 \cdot V_{x2}$$

Apparition d'une **boucle de causalité**

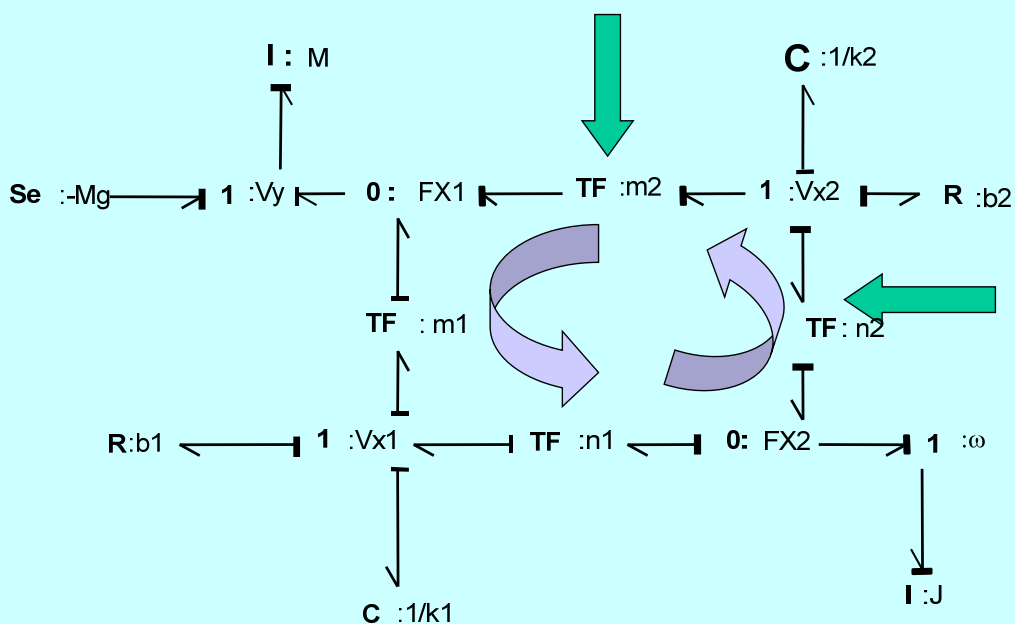


Modélisation BG ENSAM Paris (M. Rébillat, M. Vergé)

43

IV – Mouvement dans le plan

Autre causalité possible (changement des causalités de TF)



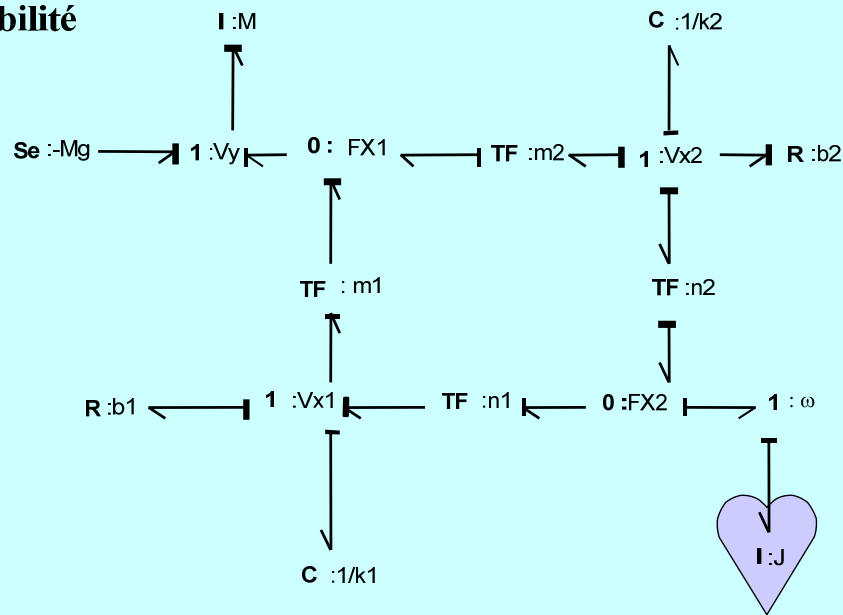
Il existe encore une **boucle de causalité**.

Modélisation BG ENSAM Paris (M. Rébillat, M. Vergé)

44

IV - Systèmes mécaniques simples

Autre possibilité



Aucune boucle de causalité, mais **I:J** est en **causalité dérivée**

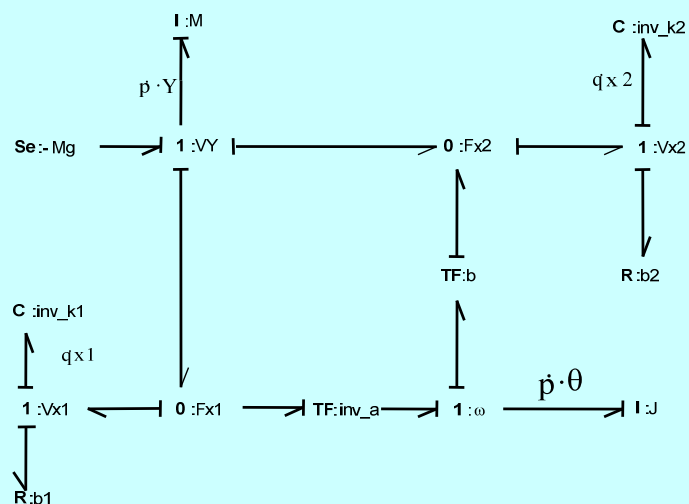
- Il existe donc une relation algébrique entre les vitesses

IV – Mouvement dans le plan

Deuxième solution: expressions en fonction de VY et ω

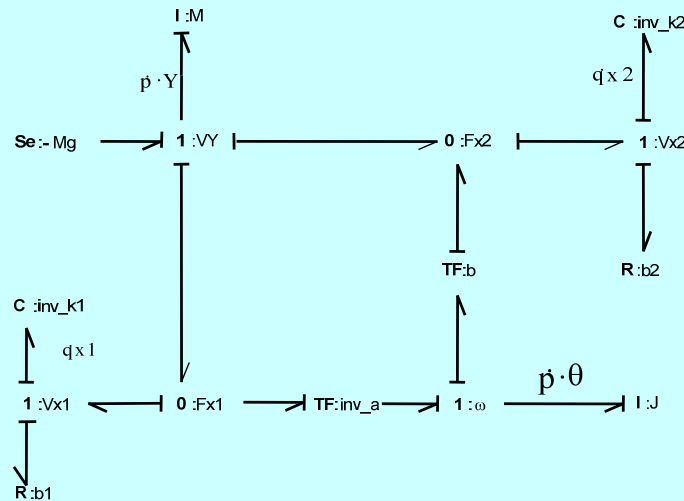
$$\begin{bmatrix} Vx1 \\ Vx2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} VY \\ \omega \end{bmatrix}$$

- Tout les éléments sont en **causalité intégrale**
- Il n'y a pas de boucle de causalité.



IV – Mouvement dans le plan

On impose les flux du centre de masse et on calcule les flux aux extrémités.



Bilan concernant les systèmes mécaniques simples

Conclusions

1. **Plusieurs Bond graphs** peuvent représenter le même système physique.
2. **Eviter les boucles de causalités** qui compliquent les simulations et les calculs $\Rightarrow$ règle heuristique : imposer les vitesses qui dépendent des éléments inertiels.
3. Pour des systèmes plus complexes, cette règle est plus délicate à appliquer, il faut « **essayer** » plusieurs BG...

Modélisation de système dynamiques multi-physiques par Bond Graphs

- 5 -

Systèmes hydrauliques



Modélisation BG ENSAM Paris (M. Rébillat, M. Vergé)

1

I - Généralités

Notations

Limites : liquides **faiblement compressibles**, les gaz ne sont pas traités ici.

Effort e	P = pression (Pa)
Flux f	Q = débit volumique (m^3/s)
Moment p	p = moment hydraulique ou impulsion = intégrale de la pression (Pa·s)
Déplacement q	V = Volume (m^3) $V(t) = \int_0^t Q(\tau) d\tau$

Modélisation BG ENSAM Paris (M. Rébillat, M. Vergé)

2

I - Généralités

Notations

Puissance	$P(t) \cdot Q(t)$	W
Énergie E	Cinétique (J) $E = \int Q \cdot dp$	
	Potentielle (J) $E = \int P(V) \cdot dV$	
Élément R	R : restriction	Pa/(m ³ /s)
Élément I	I : inertie d'un fluide	Pa/(m ³ /s ²)
Élément C	C : accumulateur hydraulique	m ³ /Pa

I - Généralités

Procédure systématique de construction du BG

- 1) Une **jonction 0** à chaque **pression** du circuit.
- 2) Un **sens de circulation** du fluide par branche.
- 3) Une **jonction 1** entre chaque jonction 0 si un élément est situé entre les deux pressions correspondantes.
- 4) Les **sens de transmission de la puissance** (liens).
- 5) La jonction 0 correspondant à la **pression atmosphérique** peut généralement être **simplifiée**.

II - Principaux éléments

Élément R

- **Phénomène:** dissipation d'énergie à travers une restriction.
- **Modélisation** différente selon que l'écoulement est laminaire ou turbulent :

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \quad (\text{nombre de Reynolds})$$

où :
v est la vitesse moyenne du fluide (m/s)
d est le diamètre de la section de passage (m)
 ν est la viscosité du fluide (m²/s)

- Si $Re < 200$ l'écoulement est **laminaire**
- Si $Re > 2000$ l'écoulement est **turbulent**

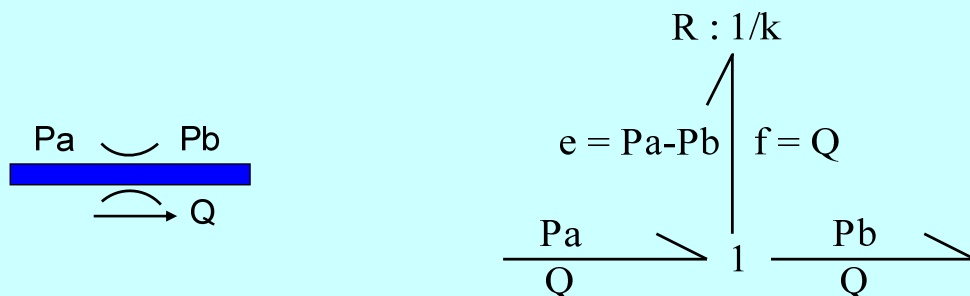
II - Principaux éléments

Élément R

Cas de l'écoulement laminaire

La relation **physique** liant le débit aux pressions est : $Q = k \cdot (P_a - P_b)$

Modélisation en Bond Graphs: $f = k \cdot e$ donc $R = e / f = 1/k$



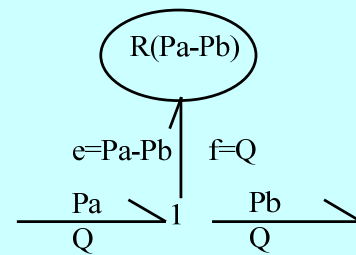
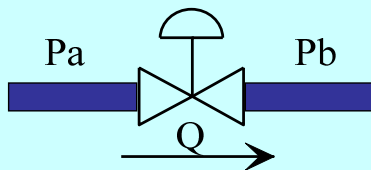
II – Principaux éléments

Élément R

Cas de l'écoulement turbulent

Dans ce cas, la relation **physique** est : $Q = k \cdot \sqrt{P_a - P_b}$

Modélisation en Bond Graphs: $f = k \cdot \sqrt{e}$ $R = \frac{e}{f} = \frac{\sqrt{e}}{k} = \frac{\sqrt{P_a - P_b}}{k}$



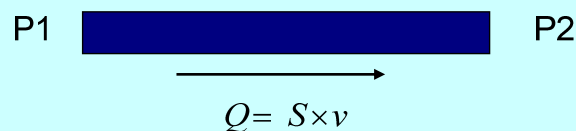
Remarques: Utilisation d'un élément R variable et non linéaire représenté par une bulle.

II – Principaux éléments

Élément I

Cet élément matérialise l'**accumulation d'énergie cinétique**.

Tuyau de section S, de longueur L, contenant du fluide de masse volumique ρ



Bilan des forces sur la « tranche » de liquide dans le tuyau:

- Force exercée à gauche: $F_g = P_1 \times S$
- Force exercée à droite: $F_d = -P_2 \times S$
- Force d'inertie : $F_I = \rho L \times \frac{dQ}{dt}$

Bilan: $\frac{dQ}{dt} = \frac{S}{\rho L} \times (P_1 - P_2)$

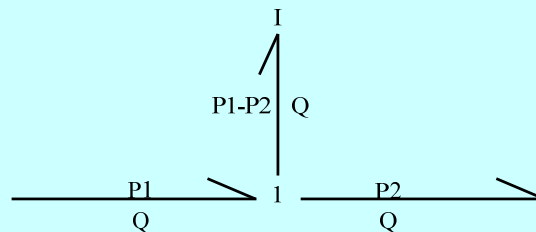
II – Principaux éléments

Élément I

Modélisation Bond Graph:

$$Q(t) = \frac{1}{I} \cdot \int_0^t [P1(\tau) - P2(\tau)] \cdot d\tau \quad \text{avec} \quad I = \frac{\rho \cdot L}{S}$$

Bond Graph associé:

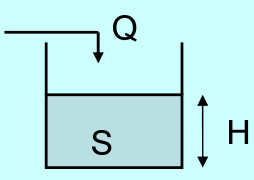


II – Principaux éléments

Élément C

Cuve fermée

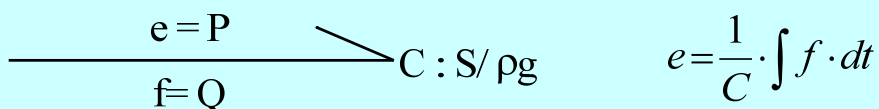
L'élément C traduit une **accumulation d'énergie potentielle**.



$$S \cdot \frac{dH}{dt} = Q \quad \text{et} \quad P = \rho \cdot g \cdot H \quad \text{d'où} \quad \frac{S}{\rho g} \cdot \frac{dP}{dt} = Q$$

$$\text{Donc} \quad P = \frac{1}{C} \int Q \cdot dt \quad \text{avec} \quad C = \frac{S}{\rho \cdot g}$$

Bond Graph de la cuve fermée :



$$e = \frac{1}{C} \cdot \int f \cdot dt$$

II – Principaux éléments

Élément C

Compressibilité d'un fluide

Si la pression augmente de dP , alors le volume du fluide diminue de dV .

Module de compressibilité **B** est:

$$B = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dP} \quad \Rightarrow \quad dP = \frac{dV}{V \cdot B}$$

Exemple : tuyau précédent.

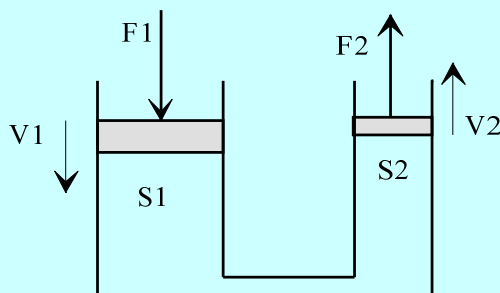
$$dP = \frac{Q \cdot dt}{S \cdot L \cdot B} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{S \cdot L \cdot B} \cdot \int Q \cdot dt$$

Par conséquent compressibilité représentée par élément C :

$$C = S \cdot L \cdot B$$

III – Composants hydrauliques

Principe de Pascal



Conservation de la **matière** :

$$V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2$$

Conservation **puissance** :

$$F_1 \cdot V_1 = F_2 \cdot V_2$$

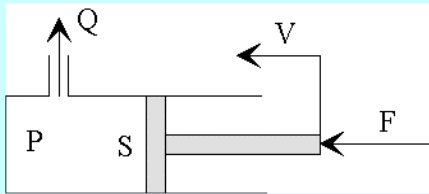
Conclusion : $\frac{F_1}{F_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{S_1}{S_2} = m$

Bond Graph associé :

$$\underline{e_1 = F_1} \searrow 1: V_1 \longrightarrow \text{TF} : m \longrightarrow 1: V_2 \searrow \underline{e_2 = F_2}$$

III – Composants hydrauliques

Piston et vérin



Hypothèses:

- fluide incompressible
- masse piston négligée.

$$P = \frac{F}{S} \quad \text{et conservation de la puissance :} \quad P \cdot Q = F \cdot V$$

Par conséquent, le **Bond Graph** associé est :

$$\frac{F}{V} \searrow \text{TF:S} \swarrow \frac{P}{Q}$$

III – Composants hydrauliques

Pompe



Hypothèses:

- Rendement = 1
- V_o = cylindrée de la pompe
- ω = Vitesse de rotation fournie par un moteur externe

Débit et vitesse de rotation

$$Q = V_o \cdot \omega$$

Conservation de la puissance:

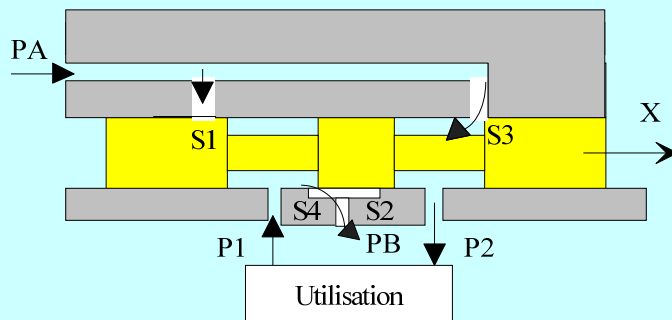
$$P \cdot Q = \Gamma \cdot \omega$$

Bond Graph associé:

$$\frac{\Gamma}{\omega} \searrow \text{TF:}V_o \swarrow \frac{P}{Q}$$

III – Composants hydrauliques

Distributeur



Variables d'intérêt:

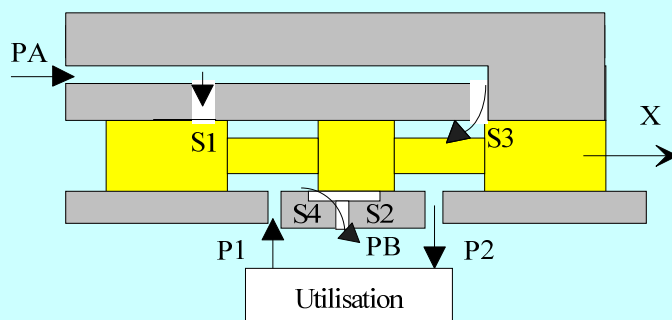
- Entrée $X(t)$
- Sortie $P2(t)$.

Principe de fonctionnement:

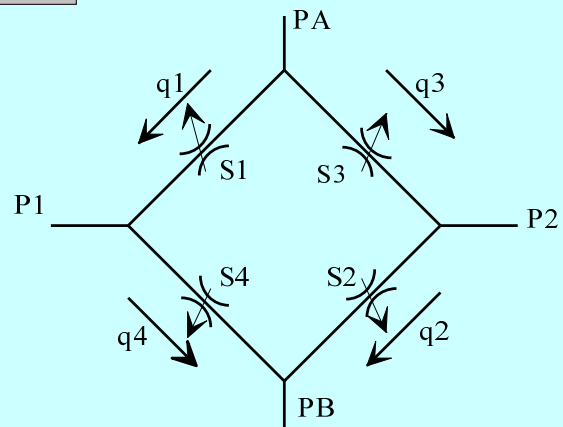
- Si $X > 0 \Rightarrow Q3 > 0, Q4 > 0$ et $Q1=Q2=0$.
- Si $X < 0 \Rightarrow Q1 > 0, Q2 > 0$ et $Q3=Q4=0$.

III – Composants hydrauliques

Distributeur



Représentation technologique:
 $S1(x), \dots, S4(x)$: restrictions variables

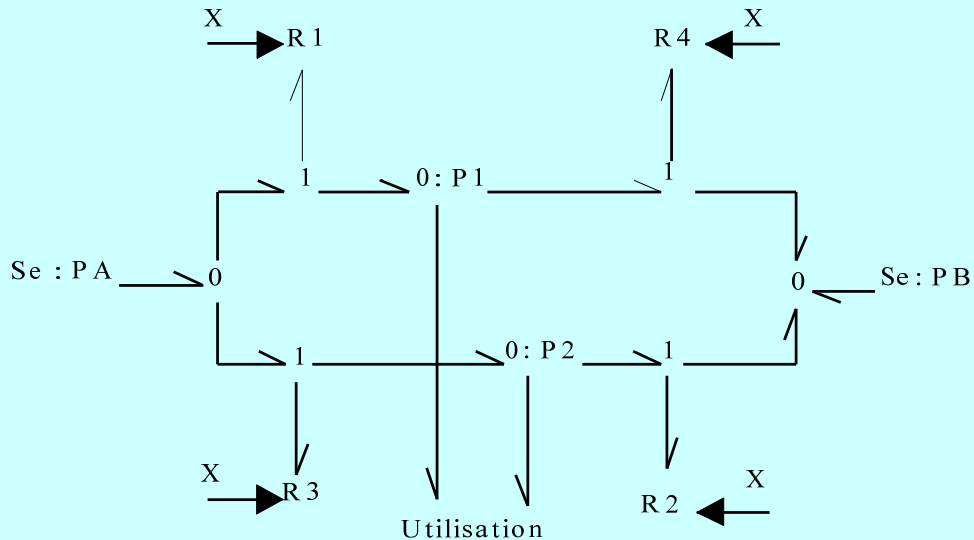


III – Composants hydrauliques

Distributeur

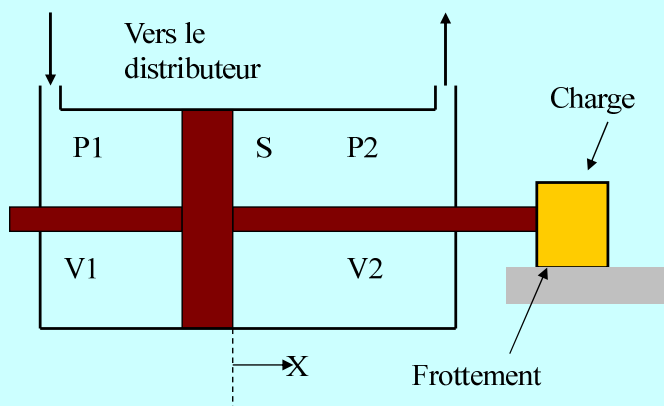
Bond Graph du distributeur :

- les résistances R_1 , R_2 , R_3 et R_4 dépendent de X



III – Composants hydrauliques

Distributeur vérin et charge



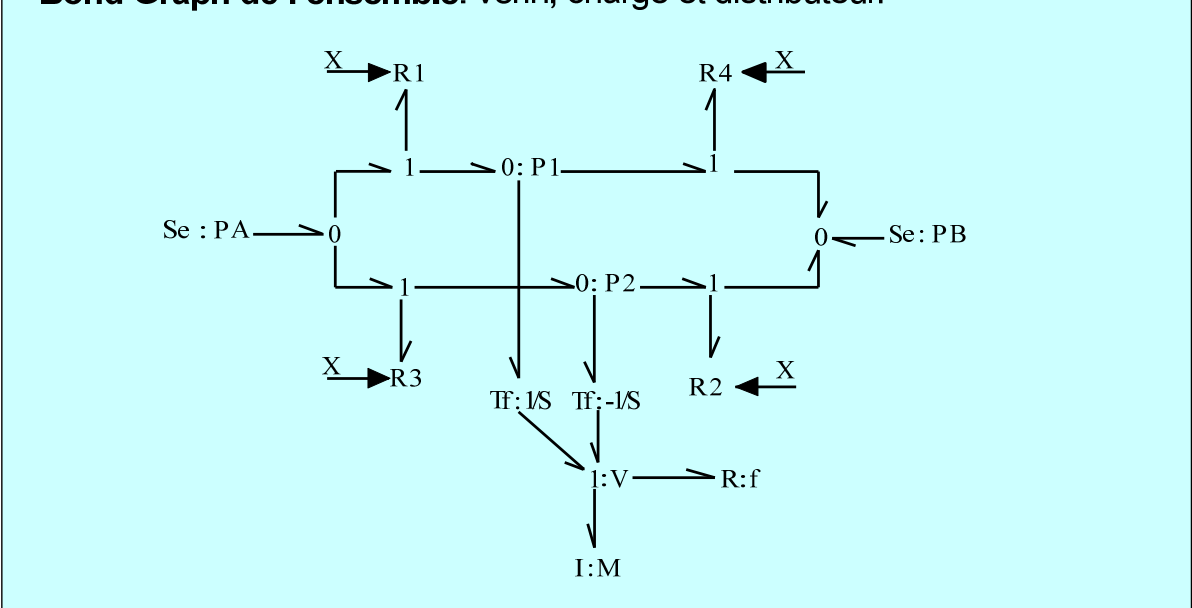
Hypothèses:

- Charge de masse M
- Frottement visqueux f

III – Composants hydrauliques

Distributeur vérin et charge

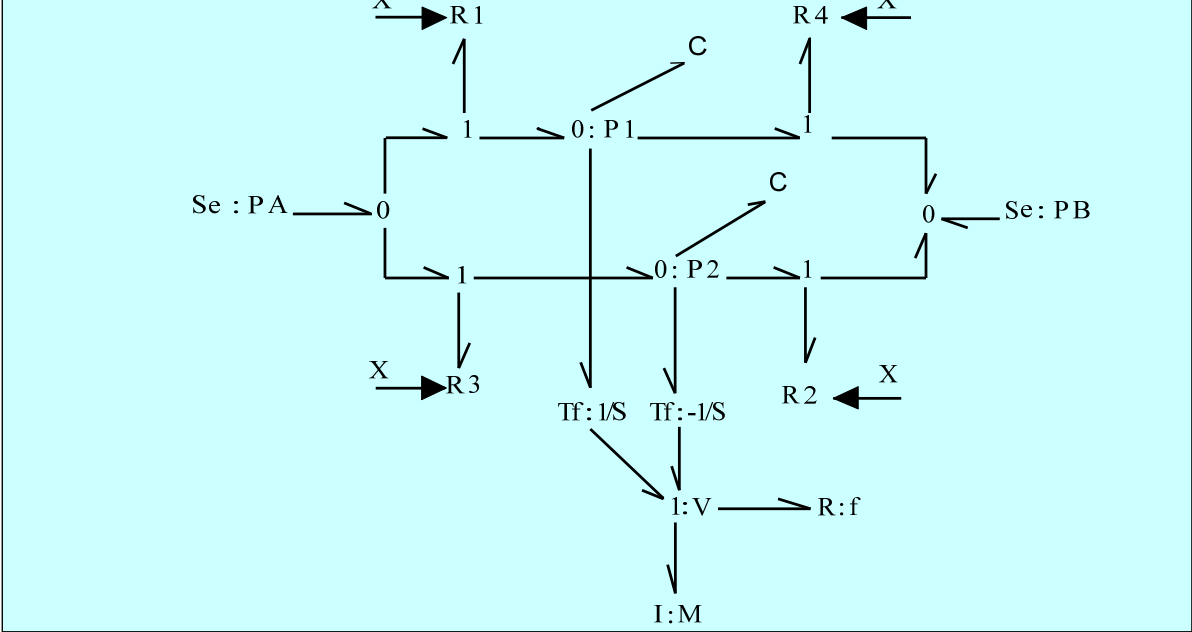
Bond Graph de l'ensemble: vérin, charge et distributeur.



III – Éléments hydrauliques

Distributeur vérin et charge

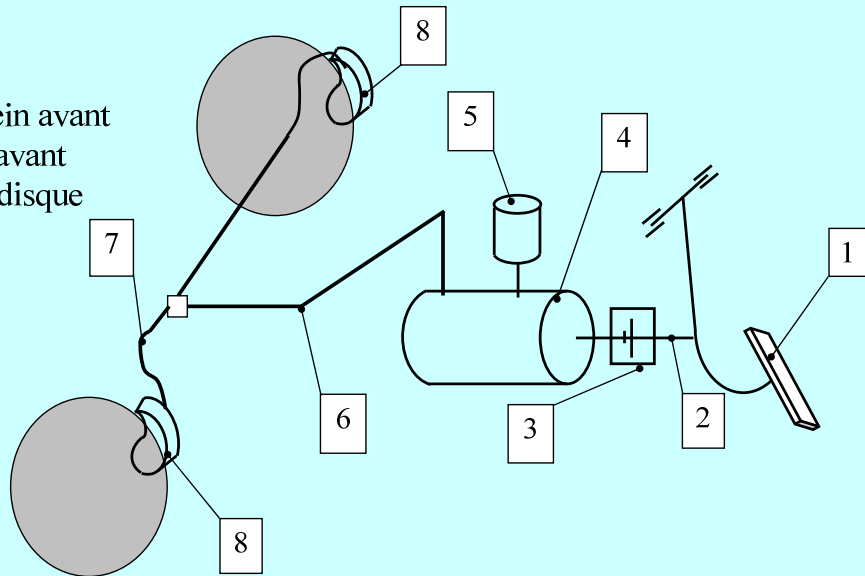
En prenant en compte la **compressibilité**:



IV – Freinage d'un véhicule

Système étudié

- 1) Pédale de frein
- 2) Tige de poussée
- 3) Assistance
- 4) Maître-cylindre
- 5) Réservoir
- 6) Canalisations de frein avant
- 7) Flexibles de frein avant
- 8) Etriers de freins à disque



Modélisation BG ENSAM Paris (M. Rébillat, M. Vergé)

21

IV – Freinage d'un véhicule

Modélisation du système

« Pédale - Tige - Assistance et Maître-cylindre »

Système qui alimente les canalisations et flexibles en huile de freinage à partir de la poussée du pied:

- Transformateur d'énergie mécanique en énergie hydraulique

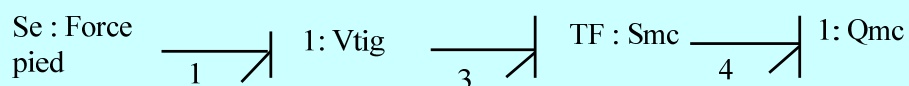
Notations :

V_{tig} : vitesse de la tige

S_{mc} : rapport de transformation du maître cylindre

Q_{mc} : débit d'huile

Bond Graph associé :



Modélisation BG ENSAM Paris (M. Vergé)

22

IV – Freinage d'un véhicule

Modélisation des canalisations et des flexibles

Les **lignes hydrauliques** sont modélisées par une **inertie** : $I = \frac{\rho \cdot L}{S}$

Les **pertes de charges** nécessitent une modélisation par un **élément R** (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{s}^{-1}$) donné par :

$$R = \frac{128 \cdot \rho \cdot L \cdot \nu}{\pi \cdot D^4}$$

ρ : masse volumique du fluide

ν : viscosité du fluide

L : longueur de la conduite

D : diamètre de la conduite

I:ILigne



l:Qmc



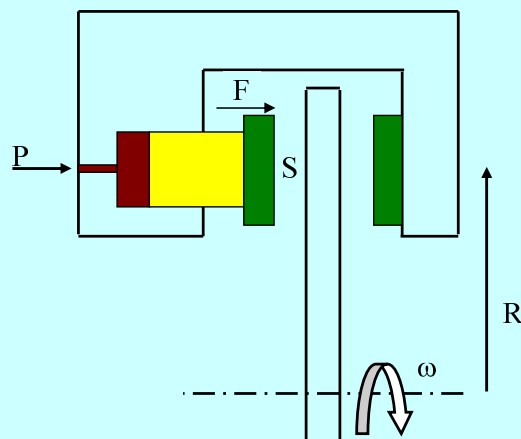
R:RLigne

IV – Freinage d'un véhicule

Etrier

Fonctionnement mécanique

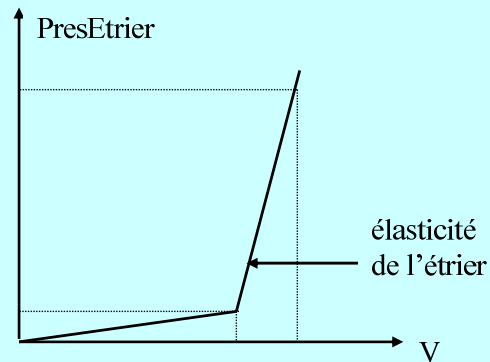
- Les plaquettes de frein sont maintenues et guidées par un **piston**.
- L'huile s'accumule dans le piston solidaire d'une plaquette.
- Une force F est alors développée sur les plaquettes.



IV – Freinage d'un véhicule

Elasticité de l'étrier

2 élasticités selon que les plaquettes touchent ou pas le disque de frein => **Elément capacitif non-linéaire**.



IV – Freinage d'un véhicule

Interaction « Plaquettes / Roue »

Les plaquettes soumises à la force F créent un **couple de freinage** sur la roue :

$$C_f = 2 \cdot P_{Etrier} \cdot S \cdot \mu \cdot R \cdot \text{sign}(-\omega)$$

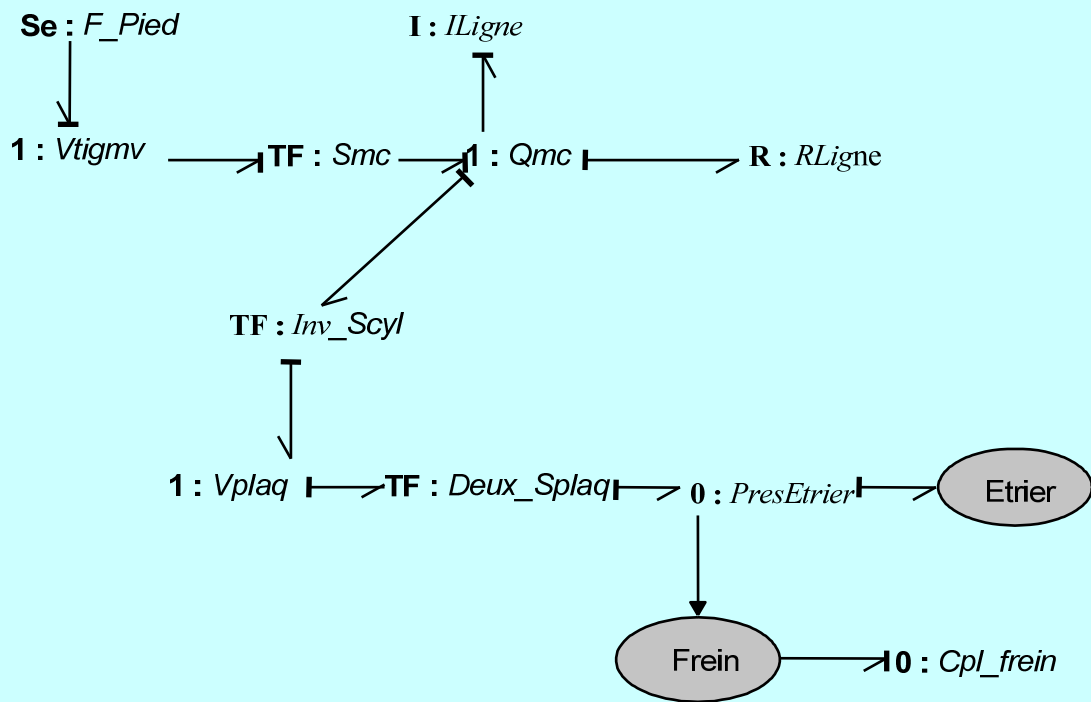
μ : Coefficient représentant la qualité des plaquettes ($\cong 0.4$), frottement sec.

S : Section du piston.

R : Rayon moyen, distance plaquette axe roue.

ω : Vitesse de rotation angulaire de la roue.

IV – Freinage d'un véhicule



Modélisation de système dynamiques multi-physiques par Bond Graphs

- 6 -

Systèmes électriques



Modélisation BG ENSAM Paris (M. Rébillat, M. Vergé)

1

I - Généralités

Notations

Limitations : système électrique pour lequel il y a continuité de puissance.

Effort e	U = tension électrique (V)
Flux f	I = courant (A)
Moment p	Φ = flux électrique (V·s)
Déplacement q	q = charge (C) $q(t) = \int_0^t i(\tau) \cdot d\tau$
Puissance	$U(t) \cdot I(t)$ (W)

Modélisation BG ENSAM Paris (M. Rébillat, M. Vergé)

2

I - Généralités

Notations

Énergie E	$E = \int I(\Phi) \cdot d\Phi$ $E = \int U(q) \cdot dq$	(J)
Élément R	Résistance	(Ω)
Élément I	L = Inductance	(H)
Élément C	C = Capacité	(F)

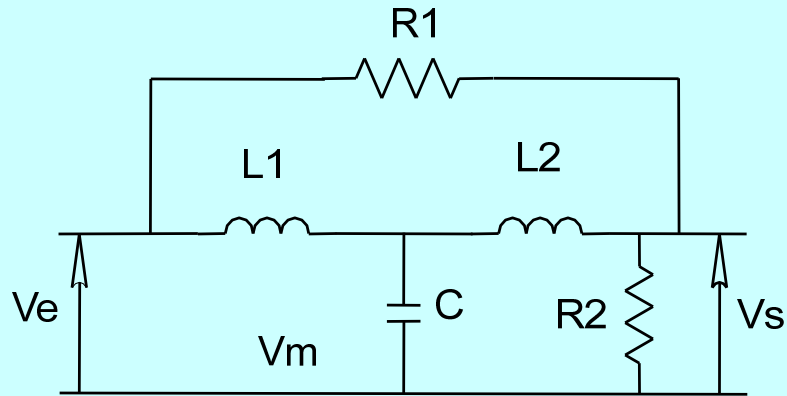
I - Généralités

Procédure systématique de construction

- 1) Affecter une **jonction 0** à chaque potentiel.
- 2) Choisir un **sens de circulation** de courant par branche.
- 3) Insérer une **jonction 1** entre chaque jonction 0 si un élément R, I, C ou une source est situé entre les deux potentiels correspondants.
- 4) Affecter les **sens de transmission de la puissance** en reliant les jonctions par des liens.
- 5) La jonction 0 correspondant au **potentiel de référence** ou potentiel nul ou « masse électrique » peut généralement être **simplifiée**.
- 6) **Simplifier**, si possible.

II – Circuits passifs

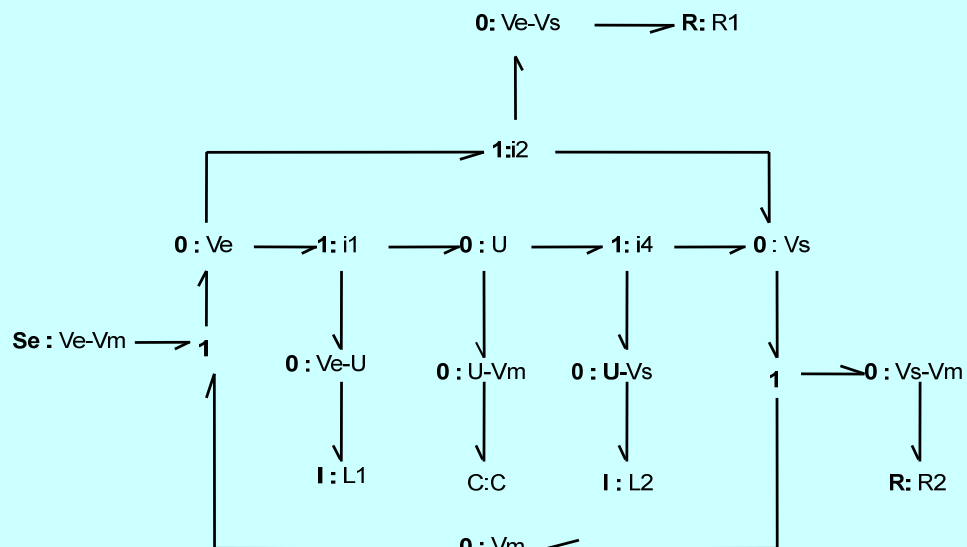
Exemple



II – Circuits passifs

Construction du Bond Graph

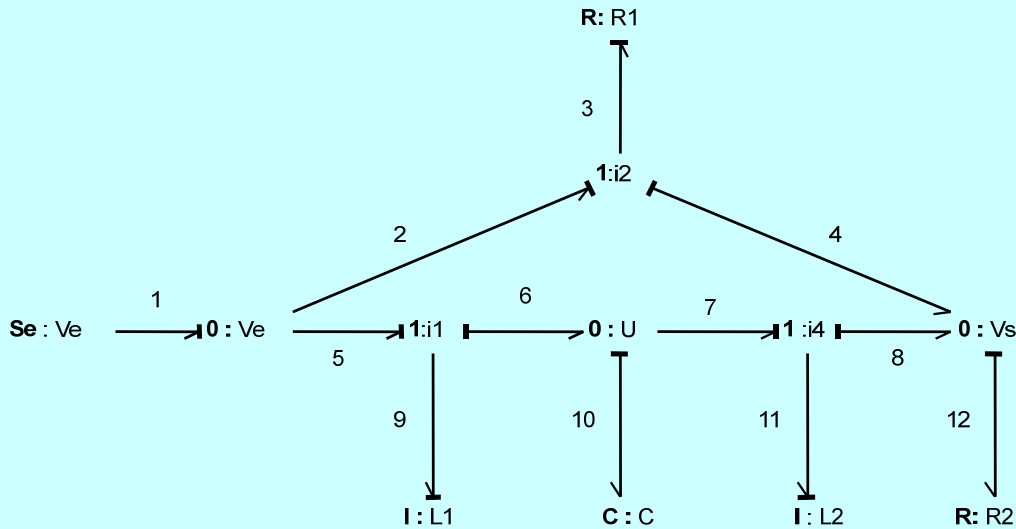
- 4 tensions : 4 jonctions 0
- Les résistances, les inductances, et la capacité sont soumises à des différence de potentiel matérialisées par des jonctions 0.



II – Circuits passifs

Simplifications

- Supprimons le potentiel de référence V_m (tensions relatives).
- Simplifions le BG en retirant les jonctions 0 inutiles.



Modélisation BG ENSAM Paris (M. Rébillat, M. Vergé)

7

III – Circuits actifs

Amplificateur opérationnel

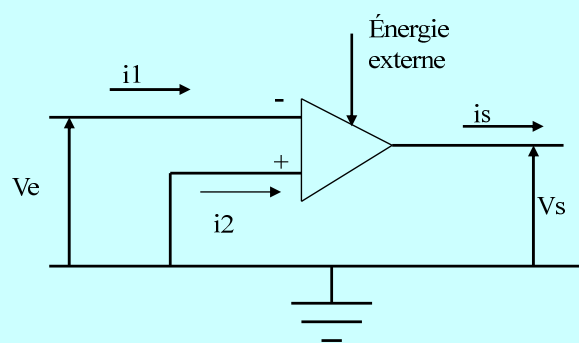
Hypothèses:

- les courants i_1 et i_2 sont pratiquement nuls.
- Le gain G est très élevé de l'ordre de 10^4 à 10^6 .

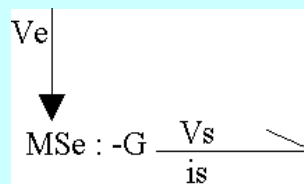
$$V_S = G \cdot (V_+ - V_-)$$

- Souvent l'entrée $+$ est reliée à la masse.

$$V_S = -G \cdot V_e$$



Modèle Bond Graph: Source d'effort modulée

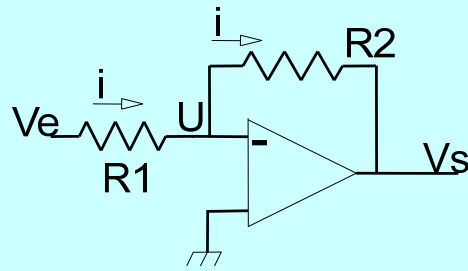


Modélisation BG ENSAM Paris (M. Rébillat, M. Vergé)

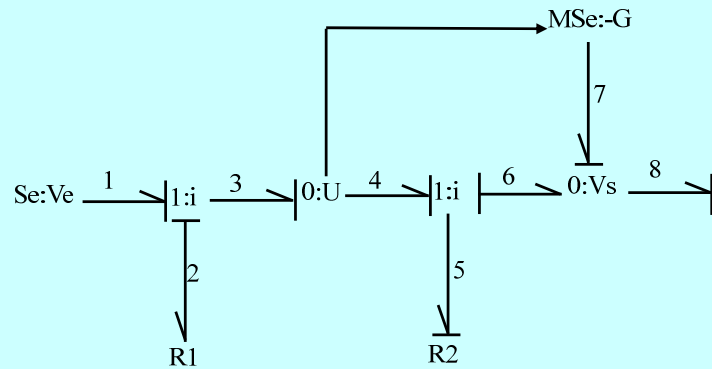
8

III – Circuits actifs

Exemple



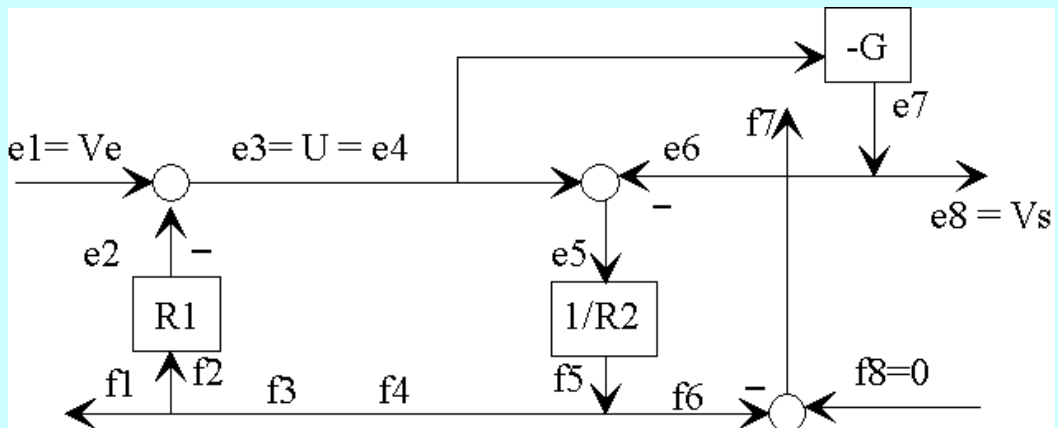
Bond Graph associé



III – Circuits actifs

Schéma-bloc

Hypothèse: le courant de sortie (f_8) est nul.

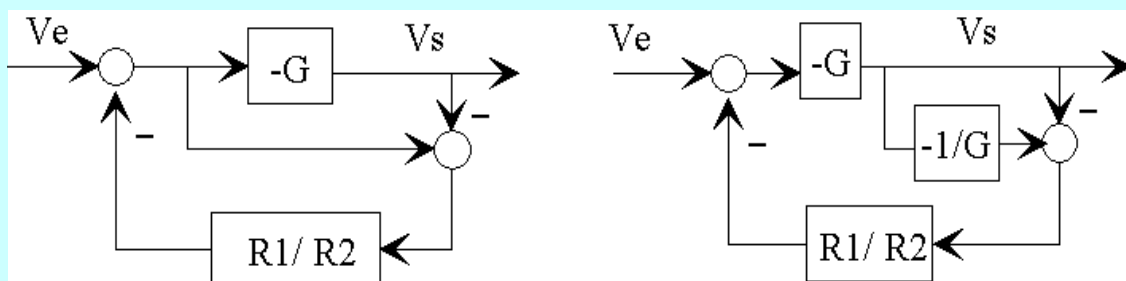


III – Circuits actifs

Réorganisation

III – Circuits actifs

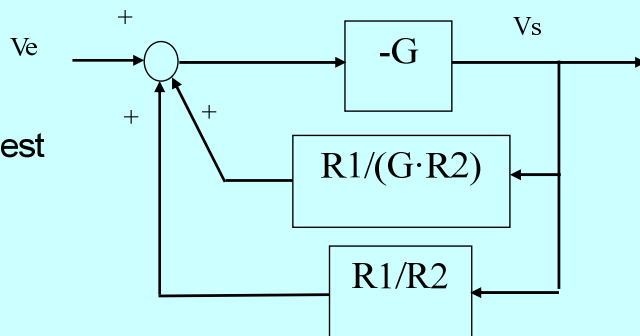
Equivalence



III – Circuits actifs

Suppression du sommateur

Hypothèse: le retour $R1/G \cdot R2$ est négligeable devant $R1/R2$.



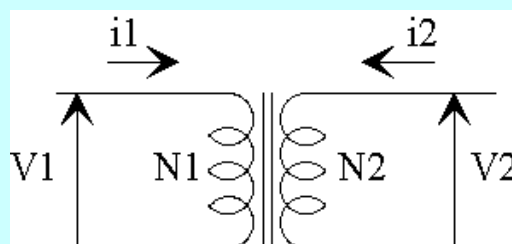
Calcul de la boucle fermée

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-G}{1 - \frac{R1}{R2} \cdot (1 - G)} \quad \text{Or puisque } G \text{ est très élevé} \Rightarrow \frac{V_s}{V_e} = -\frac{R2}{R1}$$

IV - Transformateur

N1 spires au primaire et N2 spires au secondaire

$$\frac{V2}{V1} = \frac{N2}{N1} = \frac{I1}{I2}$$



Le BG se représente par le TF :

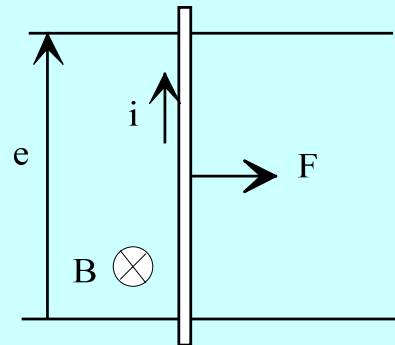
$\frac{V1}{I1} \quad \diagdown \quad \text{TF : } N1/N2 \quad \frac{V2}{I2} \quad \diagup$
--

V - Moteur

Rappels de magnétisme

Hypothèses:

- Conducteur de longueur L situé dans un champ magnétique B .
- Pertes négligées
- On lui applique la tension e .
- Il est parcouru par le courant i .
- Ce conducteur est soumis à la force F .



Force de Laplace $\vec{F} = i \cdot \vec{L} \wedge \vec{B}$ $F = B \cdot L \cdot i$

Loi de Faraday $e = B \cdot L \cdot v$

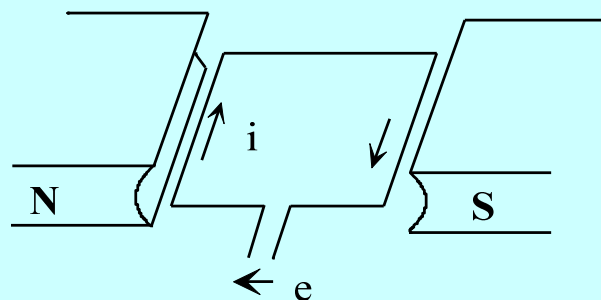
Modèle Bond Graph associé: $\frac{F}{V} \searrow \text{GY : } B \cdot L \swarrow \frac{e}{i}$

V - Moteur

Moteur à courant continu

Hypothèses :

- Circuit magnétique non saturé
- Pas de pertes



Modèle physique:

$$\Gamma = K \cdot i$$

$$e = K \cdot \omega$$

e est la f.c.e créée par le moteur.
 ω est la vitesse de rotation.

Modèle bond graph:

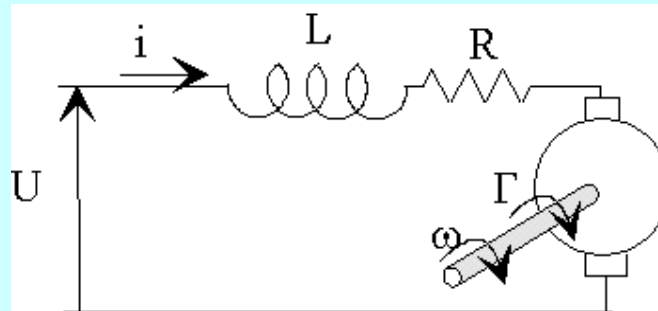
$$\frac{e}{i} \searrow \text{GY:K} \swarrow \frac{\Gamma}{\omega}$$

V - Moteur

Moteur et charge

Système étudié:

- Moteur à courant continu de résistance d'induit R et d'inductance L .
- Ce moteur entraîne une inertie J présentant le frottement visqueux f .

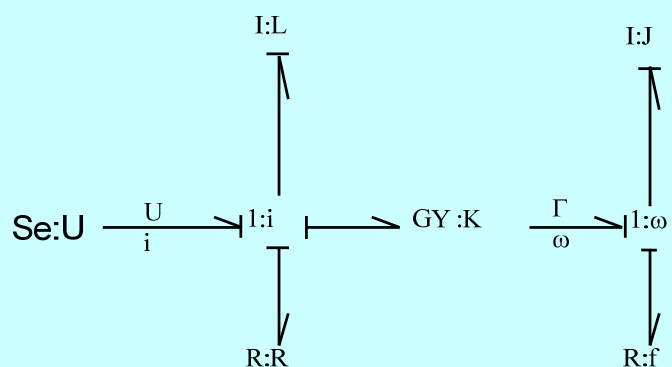


V - Moteur

Bond Graph associé

Éléments du Bond Graph:

- Jonction 1:i => courant dans le moteur
- Jonction 1:omega => vitesse angulaire
- GY:K => moteur
- Inertie I:J => charge
- Résistance R:f => frottement
- I:L => inductance du moteur
- R:R => résistance du moteur



Modélisation de système dynamiques multi-physiques par Bond Graphs

- 7 -

Systèmes thermiques



Modélisation BG ENSAM Paris (M. Rébillat, M. Vergé)

1

I – Vrais Bond Graphs

Notations pour les « Vrais Bond Graphs »

Effort e	T = température (°K)
Flux f	dS/dt = débit d'entropie (J/K·s)
Moment	Non utilisé
Déplacement q	S = entropie (J/K)
Puissance	$T(t) \cdot S(t)$ (W)
Énergie E	$E = \int T \cdot dS$ (J)

Modélisation BG ENSAM Paris (M. Rébillat, M. Vergé)

2

I – Vrais Bond Graphs

Avantages et inconvénients des « Vrais Bond Graphs »

- 1) La puissance est représentée de façon exacte.
- 2) Ces graphes sont utilisables pour représenter des transformations complexes, et certaines machines industrielles.
Exemples: les gaz, les mélanges à deux phases.
- 3) Conventions qui imposent d'utiliser des éléments spéciaux non disponibles dans les logiciels actuels.

Dans ce cours, nous n'utiliserons pas les « Vrais Bond Graphs ».

II – Pseudo Bond Graphs

Notations pour les « Pseudo Bond Graphs »

	Variable	Unité
Effort e	T = température	$^{\circ}\text{C}$
Flux f	dQ/dt flux thermique	J/s
Moment	Non utilisé	
Déplacement q	Q = quantité de chaleur	J
Puissance	Le produit $e \cdot f$ n'est pas une puissance	
Énergie E	Pas de notation	

II – Pseudo Bond Graphs

Avantages et inconvénients des « Pseudo Bond Graphs »

- 1) Il n'est pas possible d'utiliser des TF pour représenter des changements de type d'énergie (pas de conservation de la puissance)
- 2) Tous les phénomènes thermodynamiques ne peuvent pas se représenter avec ces conventions.
- 3) On peut utiliser les éléments standards des Bond Graphs
- 4) Conservation des propriétés de causalité qui structurent la mise en équations.

Dans ce cours nous utiliserons uniquement les « Pseudo Bond Graphs »

II – Pseudo Bond Graphs

Procédure systématique de construction

- 1) Affecter une **jonction 0** à chaque température.
- 2) Choisir un **sens de circulation** des échanges thermiques.
- 3) Insérer une **jonction 1** entre chaque jonction 0 si un élément R est situé entre les deux températures correspondantes.
- 4) Affecter les **sens de transmission** de la puissance en reliant les jonctions par des liens.
- 5) Simplifier, si possible

III – Principaux composants

Élément C

Considérons une enceinte contenant un liquide incompressible à pression P constante et en échange thermique avec l'extérieur:

$$dQ_i = dU = M \cdot c \cdot dT$$

M : masse du liquide (en kg)

c : chaleur massique ou chaleur spécifique (en J/kg/°C)

Q : quantité de chaleur reçue ou cédée par le liquide (en J)

$$\text{Donc} \quad T = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t \frac{dQ_i}{dt} \cdot dt \quad \text{avec} \quad C = M \cdot c$$

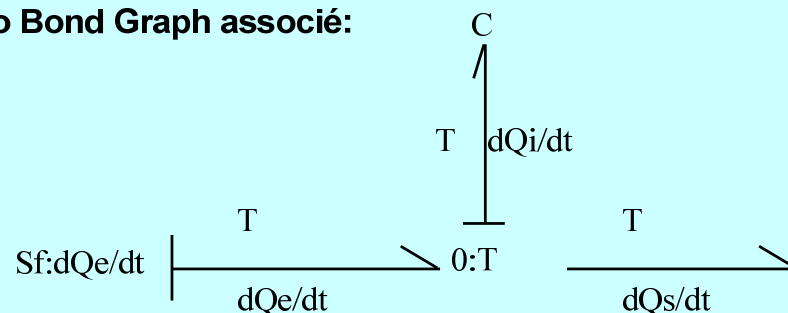
III – Principaux composants

Jonction 0

Bilan d'énergie:

$$Q_i = Q_e - Q_s \quad \text{donc} \quad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{dQ_e}{dt} - \frac{dQ_s}{dt}$$

Pseudo Bond Graph associé:



III – Principaux composants

Élément R

Considérons une **paroi**:

- T1: température de la face chaude de la paroi
- T2: température de la face froide de la paroi.

La **résistance thermique** R est donnée par : $R = \frac{e}{\lambda \cdot A}$

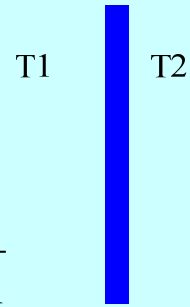
Avec :

e : épaisseur de la paroi (m) ;

λ : conductivité thermique de la paroi (J/s)/(m·°C) ;

A : surface d'échange (m²).

Bilan: $\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R} \cdot (T1 - T2)$



III – Principaux éléments

Jonction 1

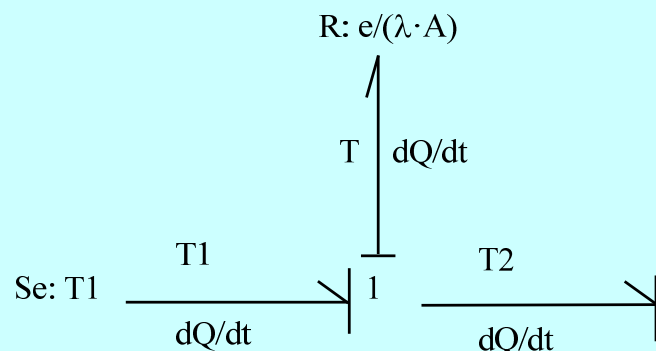
Bilan de flux d'énergie thermique:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ1}{dt} = \frac{dQ2}{dt}$$

Flux d'énergie thermique traversant la paroi:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R} \cdot (T1 - T2)$$

Pseudo Bond Graph associé:



IV - Applications

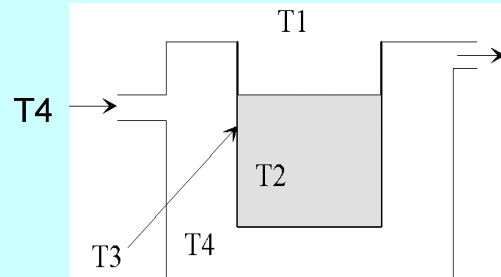
Chauffage par conduction

Pour chauffer un liquide (à la température T_2) on le place dans une enceinte dont les parois sont portées à la température T_3 par circulation d'un liquide chaud (température T_4).

Hypothèses :

T_4 est constante

L'air ambiant est à T_1 fixe



Notations :

m_2, m_4 : masses (kg) des liquides chauffé et chauffant.

m_3 : masse des parois (kg).

c_2, c_4 : chaleurs massiques des liquides 2 et 4 ($\text{J/Kg} \cdot ^\circ\text{K}$).

C_2 : capacité calorifique du liquide 2 de la cuve, $C_2 = m_2 \cdot c_2$ ($\text{J}/^\circ\text{K}$).

C_3 : capacité calorifique des parois, $C_3 = m_3 \cdot c_3$ ($\text{J}/^\circ\text{K}$).

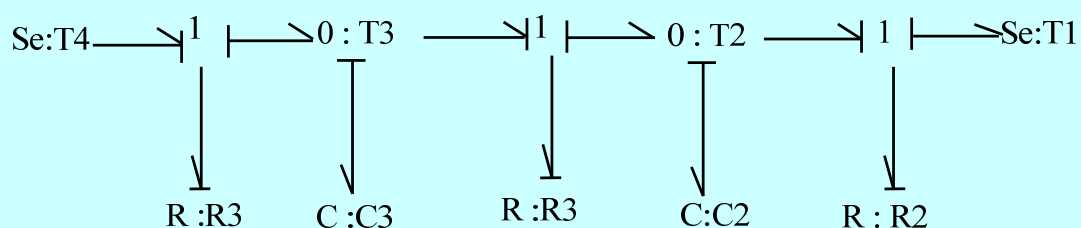
R_3 : résistance thermique (convection à la surface de la paroi).

R_2 : résistance thermique associée à l'échange entre le liquide 2 et l'air.

IV - Applications

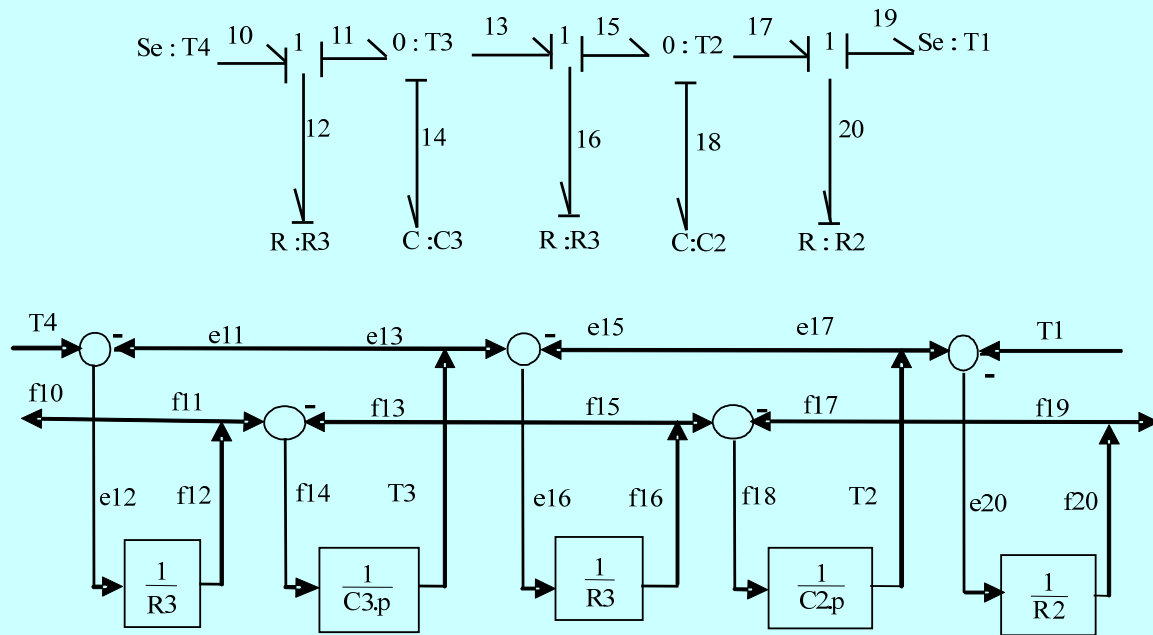
Pseudo Bond Graph associé

- Températures des parois et du liquide chauffé => jonctions 0:T3 et 0:T2.
- L'air extérieur est à la température T_1 => Se:T1.
- Le liquide chauffant => Se:T4.
- Evolution de T_3 (paroi) => C:C3 relié à 0:T3
- Evolution de T_2 (fluide chauffé) => C:C2 relié à 0:T2
- Conduction utilisons: R reliées aux jonctions 1.



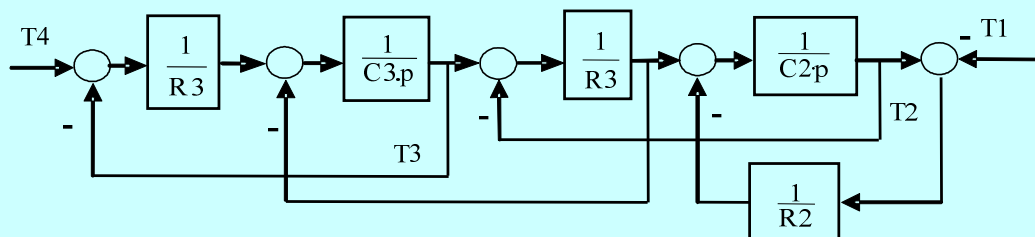
IV - Applications

Fonction de transfert



IV - Applications

Réorganisation



Etc ...

IV - Applications

Représentation d'état

Les deux températures d'**entrée** du système sont:

- T1 (considérée comme une perturbation)
- T4

La température de **sortie** est T2.

Choix du vecteur d'état : $\underline{x} = \begin{bmatrix} T2 \\ T3 \end{bmatrix}$

Vecteur d'entrée : $\underline{u} = \begin{bmatrix} T1 \\ T4 \end{bmatrix}$

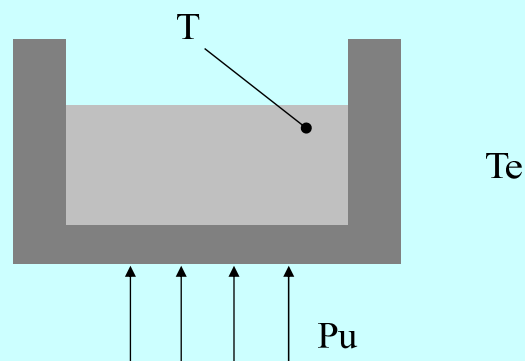
$$\begin{aligned} \dot{T}_2 &= \frac{1}{C_2} \cdot \left[\frac{1}{R_3} \cdot (T_3 - T_2) - \frac{1}{R_2} \cdot (T_2 - T_1) \right] \\ \dot{T}_3 &= \frac{1}{C_3} \cdot \left[\frac{1}{R_3} \cdot (T_4 - T_3) - \frac{1}{R_3} \cdot (T_3 - T_2) \right] \end{aligned} \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_2} \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{R_3 \cdot C_2} \\ \frac{1}{R_3 \cdot C_3} & \frac{-2}{R_3 \cdot C_3} \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2 \cdot C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3 \cdot C_3} \end{bmatrix} \cdot \underline{u}$$

IV - Applications

Chauffage avec pertes

Système considéré:

- Enceinte chauffée, contenant un liquide de masse M, à la température T.
- Liquide : chaleur massique c,
- Parois (de masses négligeables): siège de fuites thermiques.
Soit R la résistance thermique des parois (conduction)
- Te: température extérieure.
- Pu la puissance de chauffe.



IV - Applications

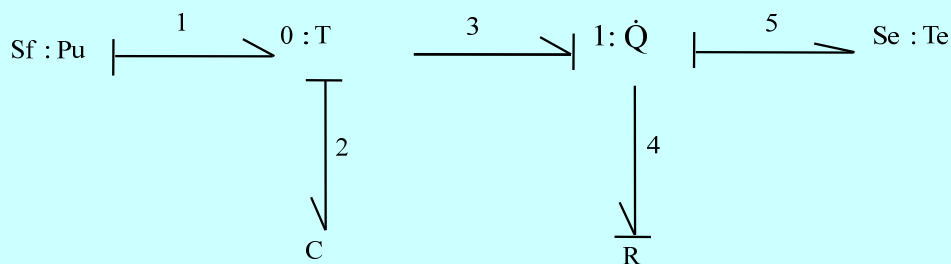
Pseudo Bond Graph associé

Il y a deux températures :

- la température T du liquide à l'intérieur de l'enceinte (jonction 0:T)
- celle de l'extérieur de l'enceinte, matérialisée par $Se:Te$.

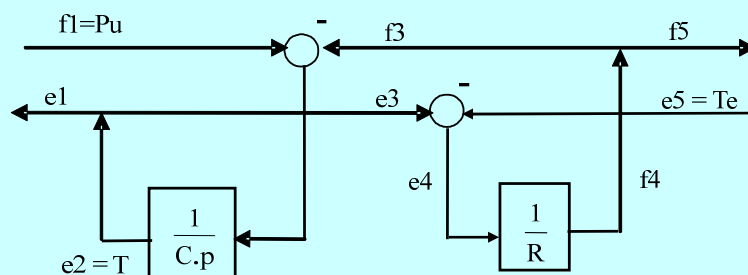
Le flux thermique des fuites est matérialisé par la jonction 1: $\dot{Q}$ relié à la résistance R caractérisant les parois.

L'enceinte est représentée par sa capacité $C = M \cdot c$.

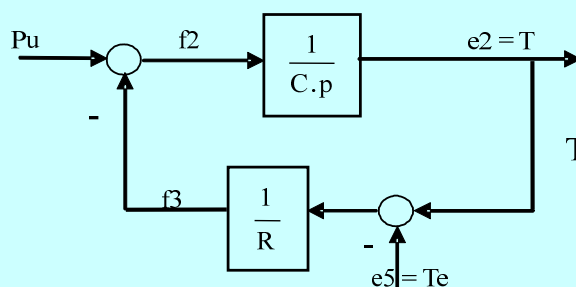


IV - Applications

Fonction de transfert



Réorganisation:



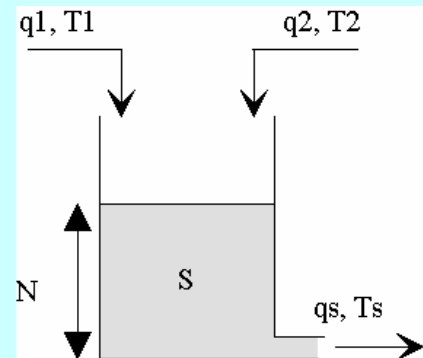
$$T(p) = \frac{R}{1 + R \cdot C \cdot p} \cdot Pu(p) - \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p} \cdot Te(p)$$

IV - Applications

Mélangeur

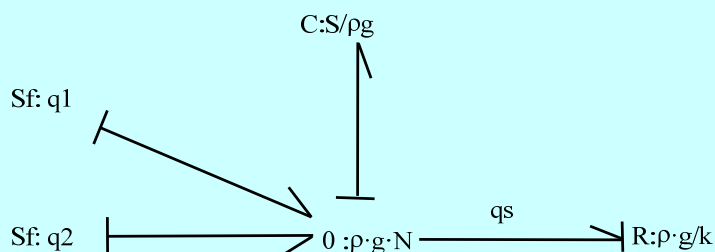
Système considéré:

- 2 liquides de températures $T_1 > T_2$.
- Liquides mélangés de sorte que la température T_s du liquide soit homogène.
- Débits volumiques d'entrée $q_1(t)$ et $q_2(t)$.
- Liquides de même masse volumique ρ et de même chaleur massique c .
- $N(t)$: niveau du fluide dans la cuve
- Débit volumique de sortie $q_s(t) = k N(t)$



IV - Applications

Bond Graph de la partie hydraulique



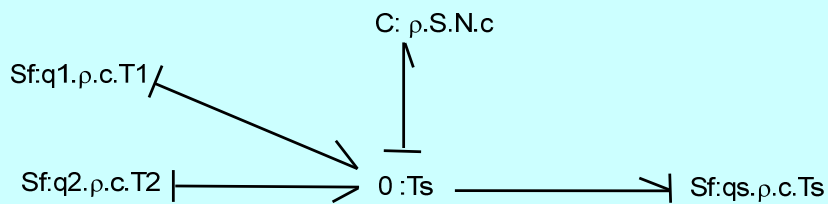
$$\rho \cdot g \cdot N = \frac{1}{C} \cdot \int (q_1 + q_2 - q_s) \cdot dt$$

$$\rho \cdot g \cdot N = \frac{\rho \cdot g}{S} \int (q_1 + q_2 - k \cdot N) \cdot dt$$

$$\dot{N} = \frac{1}{S} (q_1 + q_2 - k \cdot N)$$

IV - Applications

Pseudo Bond Graph de la partie thermique



$$T_s = \frac{1}{C} \cdot \int \frac{dQ}{dt} \cdot dt = \frac{1}{\rho \cdot S \cdot N \cdot c} \cdot \int \frac{dQ}{dt} \cdot dt$$

$$\dot{T}_s = \frac{1}{\rho \cdot S \cdot N \cdot c} \cdot \rho \cdot c [q_1 \cdot T_1 + q_2 \cdot T_2 - q_s \cdot T_s]$$

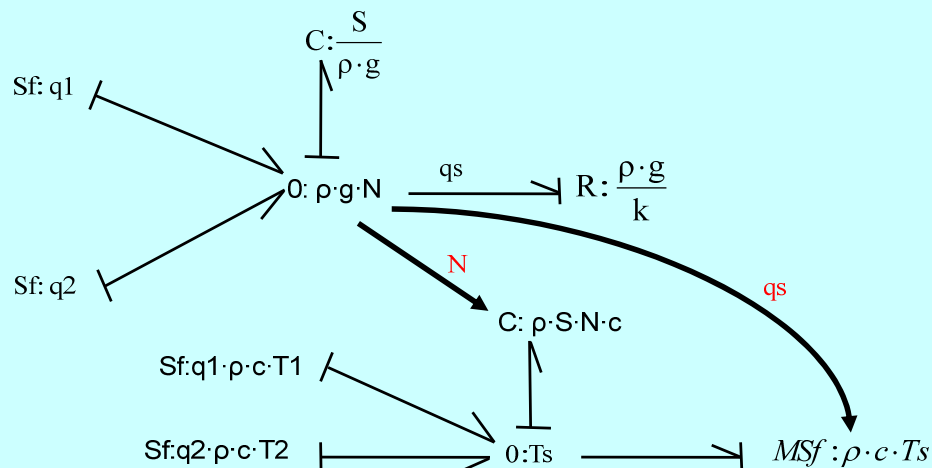
$$\dot{T}_s = \frac{1}{S \cdot N} \cdot [q_1 \cdot T_1 + q_2 \cdot T_2 - k \cdot N \cdot T_s]$$

IV - Applications

Bond Graphs couplés

Les 2 BG sont couplées car le **niveau N** et le **débit de sortie qs** sont élaborés par le BG de la partie hydraulique.
Et N et qs permettent de calculer la température Ts par le PBG thermique

Ce couplage est représenté par un **signal**.



IV - Applications

Représentation d'état

2 éléments capacitifs en causalité intégrale

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} N \\ Ts \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} q1 \\ q2 \end{bmatrix} \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{-k}{S} & 0 \\ 0 & \frac{-k}{S} \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & \frac{1}{S} \\ \frac{T1}{x1 \cdot S} & \frac{T2}{x1 \cdot S} \end{bmatrix} \cdot \underline{u}$$

Modélisation de système dynamiques multi-physiques par Bond Graphs

- 8 -

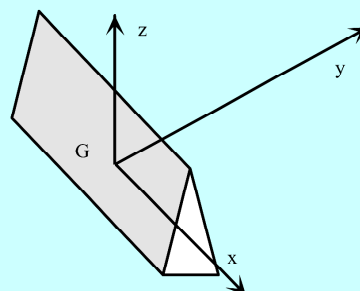
Dynamique du solide

I - Rappels de dynamique du solide

Repère des axes principaux d'inertie R_i

- Repère attaché au corps solide indéformable.
- Il passe par le centre de gravité G du solide.
- Dans R_i , la **matrice d'inertie est diagonale positive**.

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}$$



Equations d'Euler dans le repère $R_i (x,y,z)$ non-galiléen

- $\underline{V}$: vitesse du centre de gravité par rapport à $\mathbf{R}$ exprimé dans R_i
- $\underline{\omega}$: vitesse de rotation du centre de gravité par rapport à $\mathbf{R}$ exprimé dans R_i
- $\underline{F}$: force appliquée au solide exprimée dans R_i
- $\underline{\Gamma}$: couple appliqué au solide exprimé dans R_i

Principe fondamental
de la dynamique

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot \dot{V}_x + m \cdot \omega_y \cdot V_z - m \cdot \omega_z \cdot V_y \\ m \cdot \dot{V}_y + m \cdot \omega_z \cdot V_x - m \cdot \omega_x \cdot V_z \\ m \cdot \dot{V}_z + m \cdot \omega_x \cdot V_y - m \cdot \omega_y \cdot V_x \end{pmatrix}$$

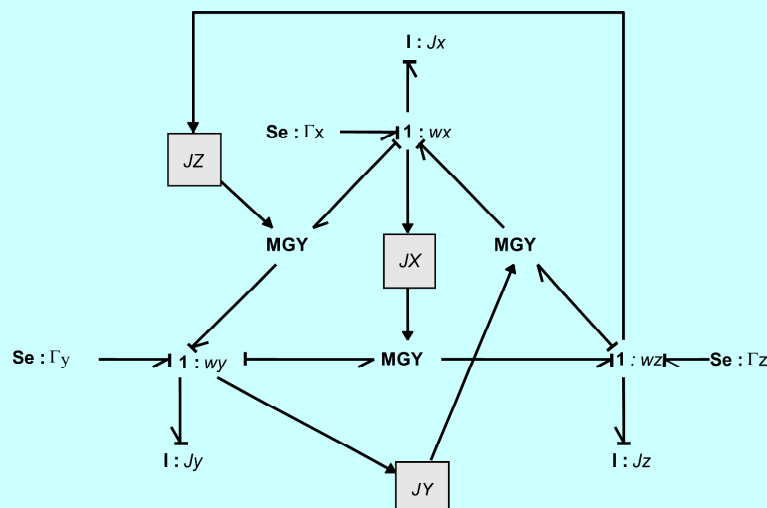
Théorème du
Moment cinétique

$$\begin{pmatrix} \Gamma_x \\ \Gamma_y \\ \Gamma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x \cdot \dot{\omega}_x + \omega_y \cdot J_z \cdot \omega_z - \omega_z \cdot J_y \cdot \omega_y \\ J_y \cdot \dot{\omega}_y + \omega_z \cdot J_x \cdot \omega_x - \omega_x \cdot J_z \cdot \omega_z \\ J_z \cdot \dot{\omega}_z + \omega_x \cdot J_y \cdot \omega_y - \omega_y \cdot J_x \cdot \omega_x \end{pmatrix}$$

II – Modélisation par Bond Graphs

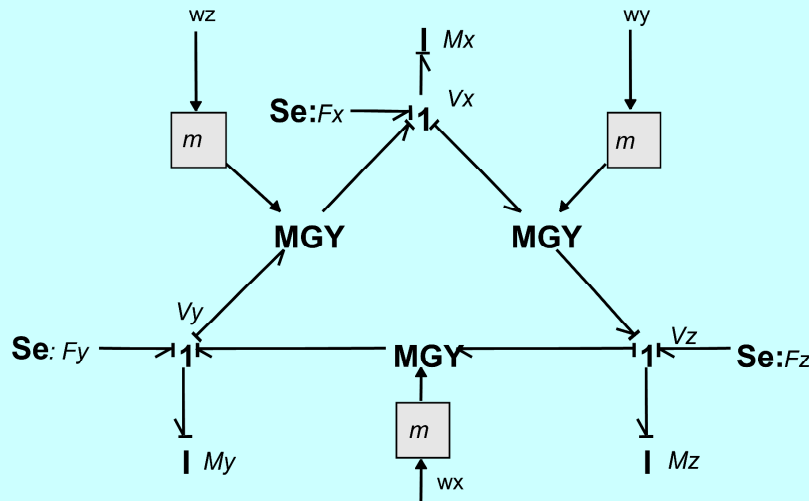
BG pour le théorème
du moment cinétique

$$\begin{pmatrix} \Gamma_x \\ \Gamma_y \\ \Gamma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x \cdot \dot{\omega}_x + \omega_y \cdot J_z \cdot \omega_z - \omega_z \cdot J_y \cdot \omega_y \\ J_y \cdot \dot{\omega}_y + \omega_z \cdot J_x \cdot \omega_x - \omega_x \cdot J_z \cdot \omega_z \\ J_z \cdot \dot{\omega}_z + \omega_x \cdot J_y \cdot \omega_y - \omega_y \cdot J_x \cdot \omega_x \end{pmatrix}$$



BG pour le principe fondamental de la dynamique

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot \dot{V}_x + m \cdot \omega_y \cdot V_z - m \cdot \omega_z \cdot V_y \\ m \cdot \dot{V}_y + m \cdot \omega_z \cdot V_x - m \cdot \omega_x \cdot V_z \\ m \cdot \dot{V}_z + m \cdot \omega_x \cdot V_y - m \cdot \omega_y \cdot V_x \end{pmatrix}$$



Remarque: le vecteur signal $\underline{\omega}$ est nécessaire.

II – Modélisation par Bond Graphs

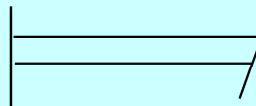
Vecteurs et Bond Graphs

- Liens de puissance vectoriels

=> Doubles traits

=> Les liens matérialisent les efforts et le flux

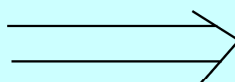
=> 2 Vecteurs de dimension 3



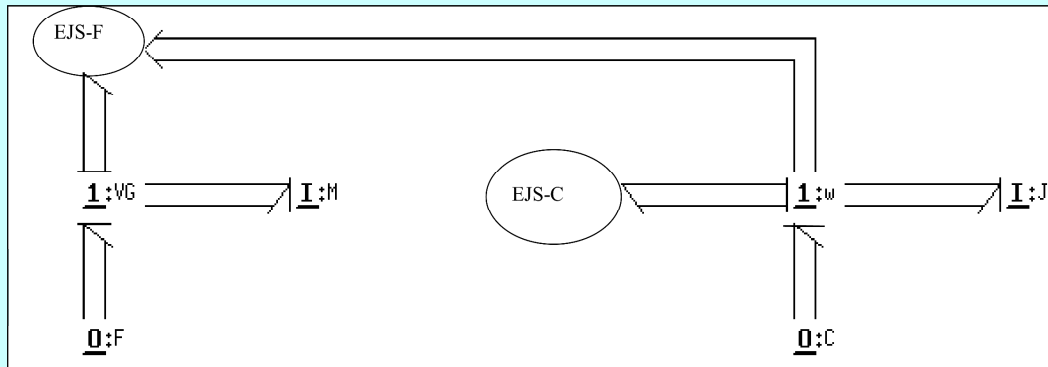
- Signal vectoriel

=> Double trait terminé par une flèche pleine

=> Un vecteur de dimension 3



Equations d'Euler dans Ri



- **I:M** => Matrice masse diagonale, chaque terme diagonal vaut m.
- **EJS-C** => *Eulerian Junction Structure* pour les couples.
Calcul des termes non-linéaires de l'équation d'Euler (couples).
- **EJS-F** => *Eulerian Junction Structure* pour les forces
Calcul des termes de l'équation d'Euler (Forces) contenant les produits de vitesse de rotation par la vitesse de translation. Il faut donc fournir $\underline{\omega}$.

Notations

r_kV => vecteur V exprimé dans le repère R_k

Passage de R1 à R2

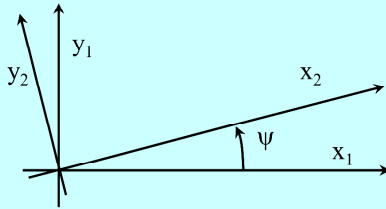
Calcul de r₁V connaissant le vecteur r₂V

$$\underline{r_1V} = A_{12} \cdot \underline{r_2V}$$

- A₁₂ la matrice de changement de base
- A₁₂ commence par l'indice de la base d'arrivée
- A₁₂ : vecteurs de la base de R₂ exprimés dans R₁

Exemple

R1 => R2 : Rotation d'angle ψ autour de l'axe z



$$A_{12} = \begin{bmatrix} \underline{r_{1x2}} & \underline{r_{1y2}} & \underline{r_{1z2}} \\ c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \underline{r_{2x1}} \\ \underline{r_{2y1}} \\ \underline{r_{2z1}} \end{matrix}$$

- Première colonne : vecteur $\underline{x_2}$ de R2 exprimé dans R1.
- Deuxième colonne : vecteur $\underline{y_2}$ de R2 exprimé dans R1.
- Première ligne: vecteur $\underline{x_1}$ de R1 exprimé dans R2.
- Deuxième colonne : vecteur $\underline{y_1}$ de R1 exprimé dans R2.

Notations : s = sinus et c = cosinus.

Exemple (suite)

- L'inverse d'une matrice de rotation est égale à la matrice transposée.

$$\underline{r_{2V}} = A_{12}^{-1} \cdot \underline{r_{1V}} = A_{12}^T \cdot \underline{r_{1V}} = A_{21} \cdot \underline{r_{1V}}$$

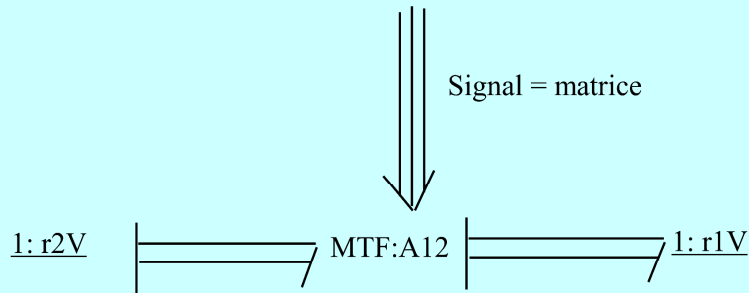
- La composition de plusieurs rotations de même centre est une rotation.

$$A_{13} = A_{12} \cdot A_{23}$$

Bond Graph d'un changement de repère

$$\underline{r1V} = A12 \cdot \underline{r2V}$$

- **MTF** alimenté par un signal ayant pour composantes les termes de A12.
- Ce signal « transporte » donc une matrice à 9 composantes.



Conservation de la puissance

$$\begin{cases} \underline{r1V} = A12 \cdot \underline{r2V} \\ \underline{r2F} = A12^T \cdot \underline{r1F} \end{cases}$$

En effet la puissance s'écrit :

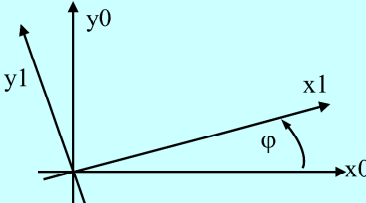
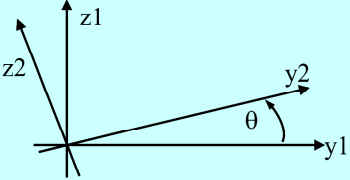
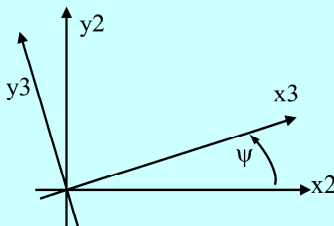
$$\underline{r2F}^T \cdot \underline{r2V} = \underline{r1F}^T \cdot A12 \cdot \underline{r2V} = \underline{r1F}^T \cdot \underline{r1V}$$

Définition

R3: repère des axes principaux d'inertie **Ri**.

A partir d'un repère **R0** galiléen, on obtient **R3** par trois rotations :

- 1) Une rotation autour de l'axe z_0 d'angle φ ($R_0 \Rightarrow R_1$)
=> angle de **nutation**
- 2) Une rotation autour de l'axe x_1 d'angle θ ($R_1 \Rightarrow R_2$)
=> angle de **précession**
- 3) Une rotation autour de l'axe z_2 d'angle ψ ($R_2 \Rightarrow R_3$)
=> angle de **rotation propre**

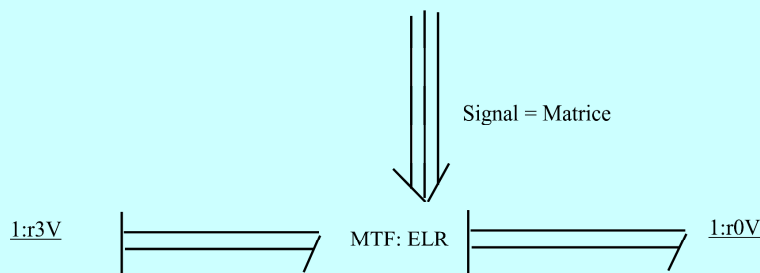
Rotation d'axe z_0		$A_{01} = \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Rotation d'axe x_1		$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix}$
Rotation d'axe z_2		$A_{23} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bond Graph du passage aux coordonnées Eulériennes

Matrice de changement de repère pour passer de R3 vers R0.

$$\underline{r0V} = A01 \cdot A12 \cdot A23 \cdot \underline{r3V} = \text{ELR} \cdot \underline{r3V}$$

$$\text{ELR} = \begin{pmatrix} c\varphi \cdot c\psi - s\varphi \cdot c\theta \cdot s\psi & -c\varphi \cdot s\psi - s\varphi \cdot c\theta \cdot c\psi & s\varphi \cdot s\theta \\ s\varphi \cdot c\psi + c\varphi \cdot c\theta \cdot s\psi & -s\varphi \cdot s\psi + c\varphi \cdot c\theta \cdot c\psi & -c\varphi \cdot s\theta \\ s\theta \cdot s\psi & s\theta \cdot c\psi & c\theta \end{pmatrix}$$



En pratique: calcul de la matrice ELR

- **Les capteurs sont fixés au solide**

=> Il fournissent la vitesse de rotation exprimée dans le repère R3:

$$\underline{\omega} = \omega x \cdot \underline{r3x} + \omega y \cdot \underline{r3y} + \omega z \cdot \underline{r3z}$$

- On a besoin de **connaître les angles** φ , θ , ψ (ou au moins leur dérivée):

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \underline{r0z} + \dot{\theta} \cdot \underline{r1x} + \dot{\psi} \cdot \underline{r2z}$$

- **Projection de tout dans R3**

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \cdot A03 \cdot \underline{r3z} + \dot{\theta} \cdot A13 \cdot \underline{r3x} + \dot{\psi} \cdot A23 \cdot \underline{r2z}$$

Calcul de la matrice ELR (suite)

Ecriture sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\psi \cdot s\theta & c\psi & 0 \\ c\psi \cdot s\theta & -s\psi & 0 \\ c\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Inversion:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s\psi}{s\theta} & \frac{c\psi}{s\theta} & 0 \\ c\psi & -s\psi & 0 \\ \frac{-s\psi \cdot c\theta}{s\theta} & \frac{-c\psi \cdot c\theta}{s\theta} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Donc, par intégration du vecteur précédent, et en tenant compte des C.I, on calcule les angles φ θ ψ et on alimente le MTF du BG de changement de repère, dans lequel la matrice ELR est calculée à chaque instant.

Notations

R0: le repère fixe

R1: un repère mobile quelconque d'origine P

A : point (quelconque) de l'espace

r0VPr0 : vitesse de l'origine P du repère mobile R1 (par rapport à R0)
exprimée dans le repère fixe R0.

r0VAr0 : vitesse du point A (par rapport à R0)
exprimée dans le repère fixe R0.

r1VAr1 : vitesse du point A (par rapport à R1)
exprimée dans le repère mobile R1.

r1PA : vecteur PA exprimé dans le repère mobile R1 d'origine P.

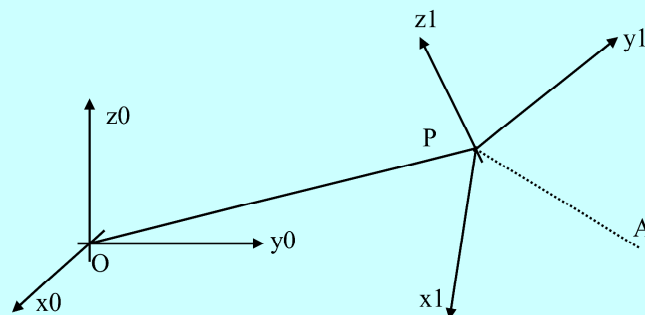
r1 ω r1r0 : vitesse de rotation angulaire (ou instantanée) de R1
par rapport à R0 et exprimée dans le repère R1.

Méthode

La représentation d'un solide par BG s'effectue en **trois étapes** :

- 1) Représenter les vitesses (étude cinématique).
- 2) Connecter les vitesses par des liens, des jonctions et des MTF, ...
- 3) Étudier la dynamique en incluant les sources d'effort.

Composition des vitesses dans R0



$$\underline{r_0 V_A r_0} = \underline{r_0 V_P r_0} + \underline{r_0 V_A r_1} + \underline{r_0 \omega r_1 r_0} \wedge \underline{r_0 P A}$$

Composition des vitesses dans le repère d'inertie R1

- A, B: points d'un même solide indéformable : $\underline{r1VAr1} = \underline{r1VBr1} = \underline{0}$
- P = Centre de masse

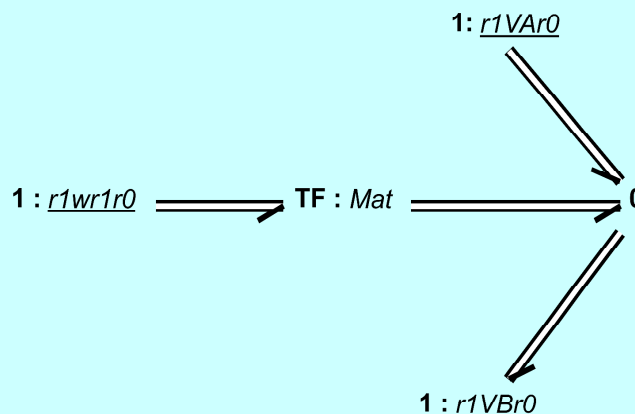
$$\underline{r1VBr0} = \underline{r1VAr0} + \underline{r1\omega r1r0} \wedge \underline{r1AB}$$

Dans le repère d'inertie R1, $\underline{r1AB}$ est constant: $\underline{r1AB} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$

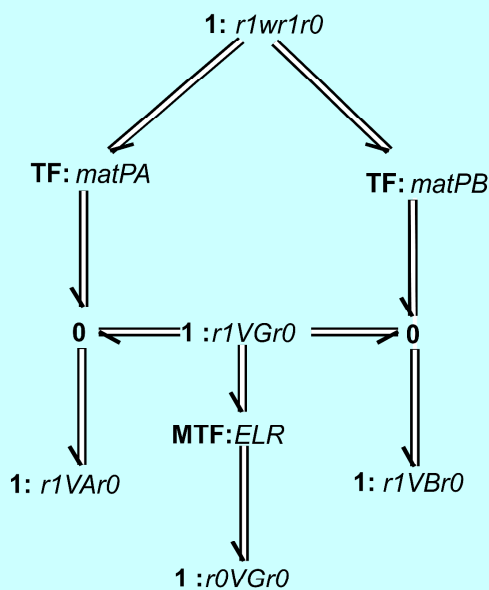
$$\underline{r1\omega r1r0} \wedge \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \text{Mat} \cdot \underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{\omega}$$

Bond Graph de la composition des vitesses dans le repère d'inertie

$$\underline{r1VBr0} = \underline{r1VAr0} + \underline{r1\omega r1r0} \wedge \underline{r1AB}$$

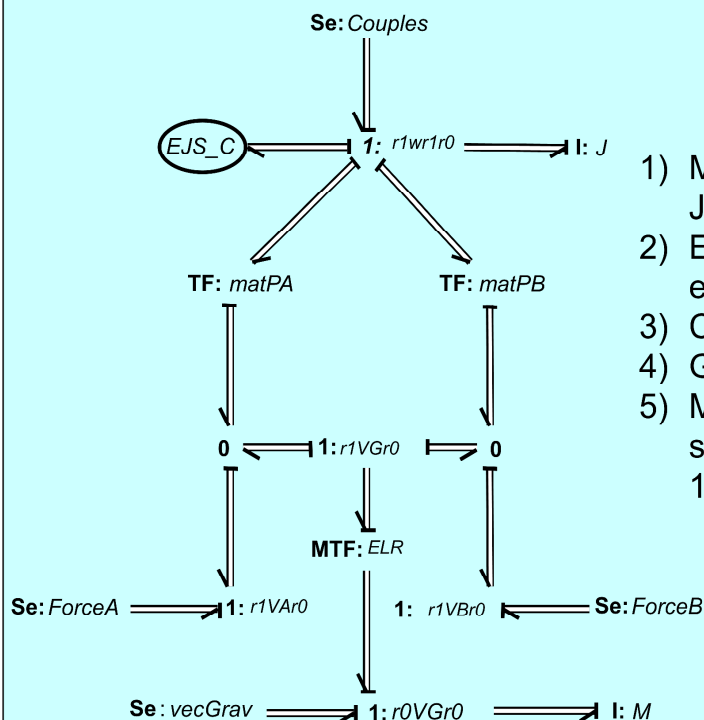


Cinématique



- **TF:matPA et TF:matPB**
 - Calcul de produits vectoriel
 - Matrices constantes dans R1 lié au solide
- **Jonctions 1:r1VAr0 et 1:r1VBr0**
 - Vitesses de A et B par rapport à R0
 - Exprimées dans le repère R1
- **Jonction 1:r1VGr0**
 - G origine de R1
 - Vitesse de G par rapport à R0
 - Exprimée dans le repère R1.
- **MTF:ELR**
 - Matrice de changement de repère
 - Passage de R1 mobile à R0 galiléen.

Dynamique

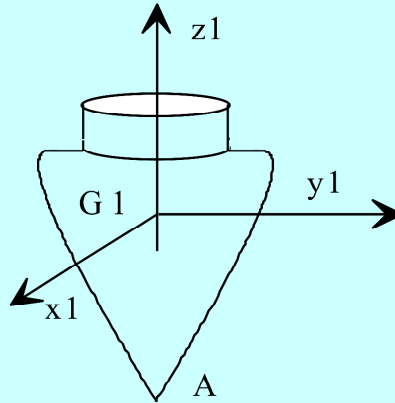


- 1) Matrices de masse M et d'inertie J diagonales
- 2) Efforts extérieurs appliqués en A et en B exprimés dans R1
- 3) Couples appliqués en G dans R1
- 4) Gravité appliquée en G dans R0
- 5) MGY et MTF alimentés par des signaux non représentés issus de $1:r1wr1r0$

$$\text{vecGrav} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{bmatrix}$$

VI – Application : Toupie

Notations



Une toupie tourne avec une vitesse de rotation initiale donnée.

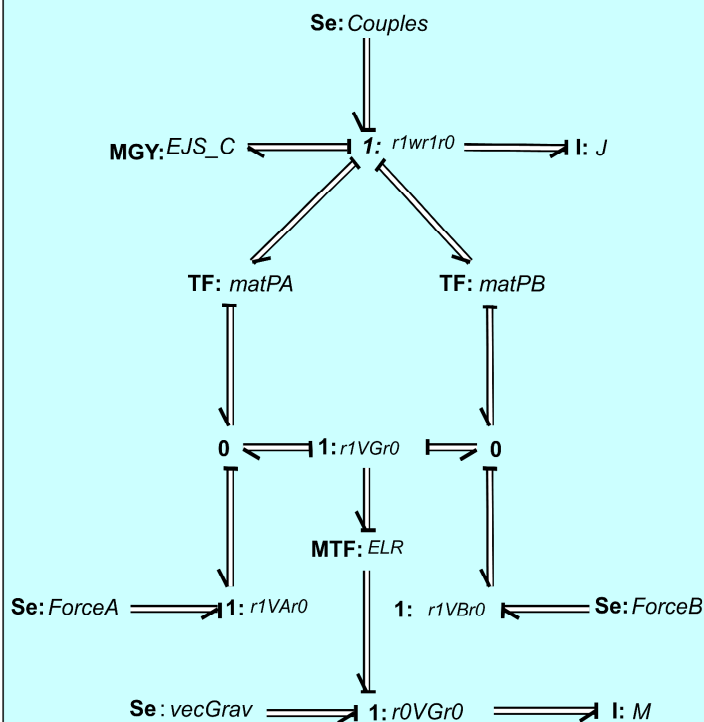
La toupie possède un appui au sol fixe (liaison rotule) : noté A.

Choisissons le repère galiléen (R0) d'origine A et d'axe Az_0 vertical.

Repère R1 = axes principaux d'inertie la toupie .

VI – Application : Toupie

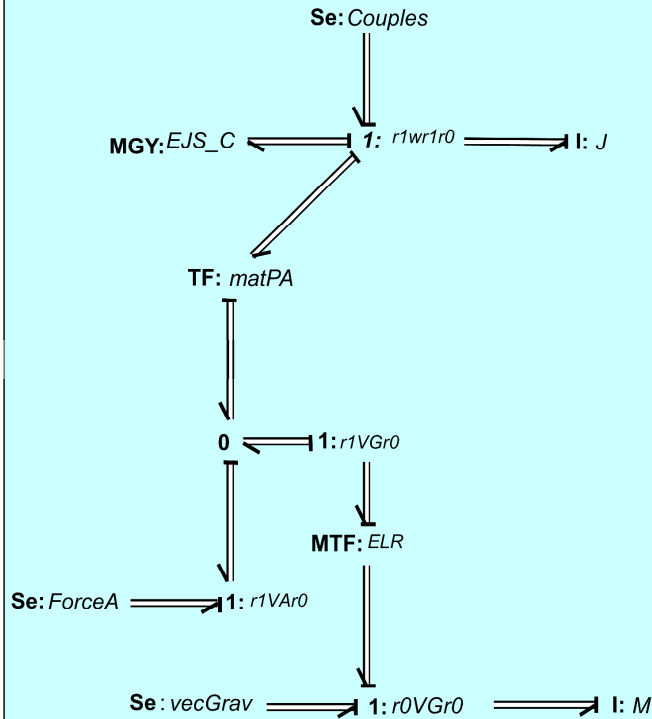
Bond Graph de la Toupie



1) Un seul point sur le solide:
on élimine la branche
associée au point B.

VI – Application : Toupie

Bond Graph de la Toupie

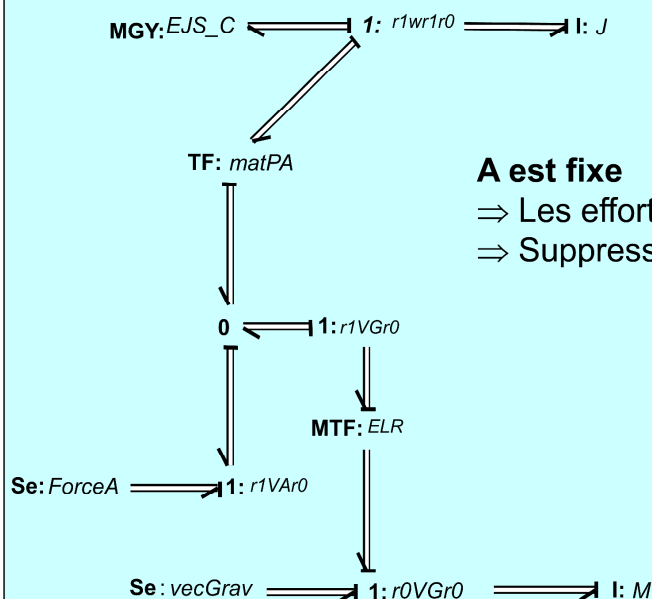


Un seul point sur le solide

=> On élimine la branche associée au point B.

VI – Application : Toupie

Bond Graph de la Toupie

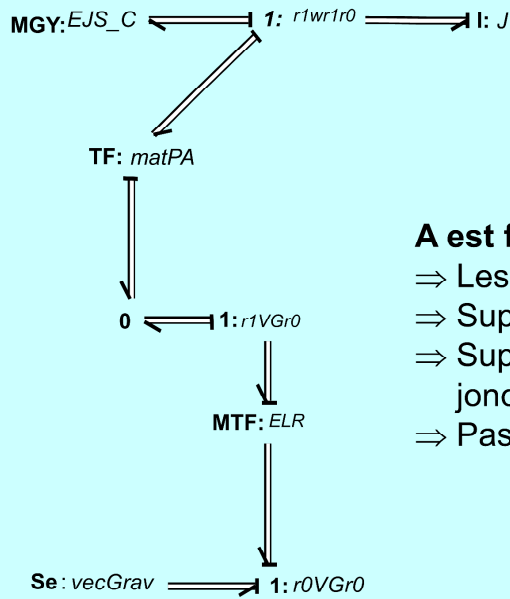


A est fixe

=> Les efforts appliqués en A ne travaillent pas

=> Suppression de la source d'efforts $Se: Cpl$

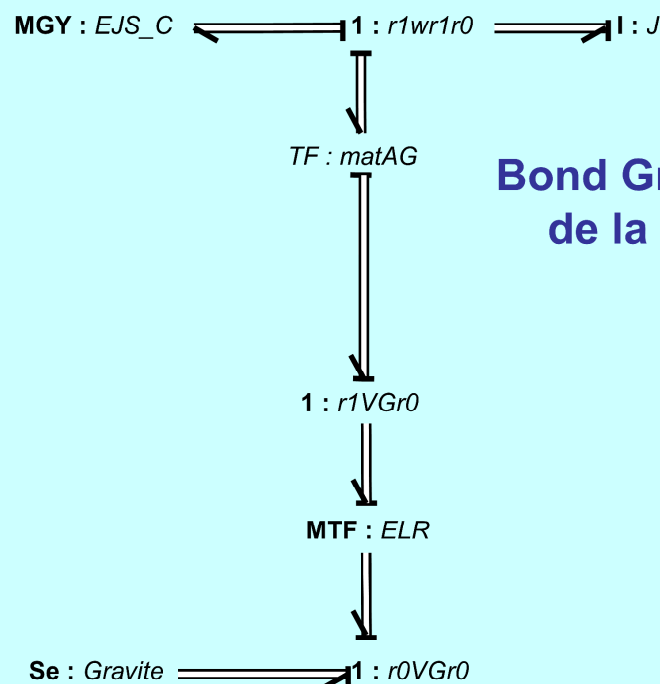
Bond Graph de la Toupie



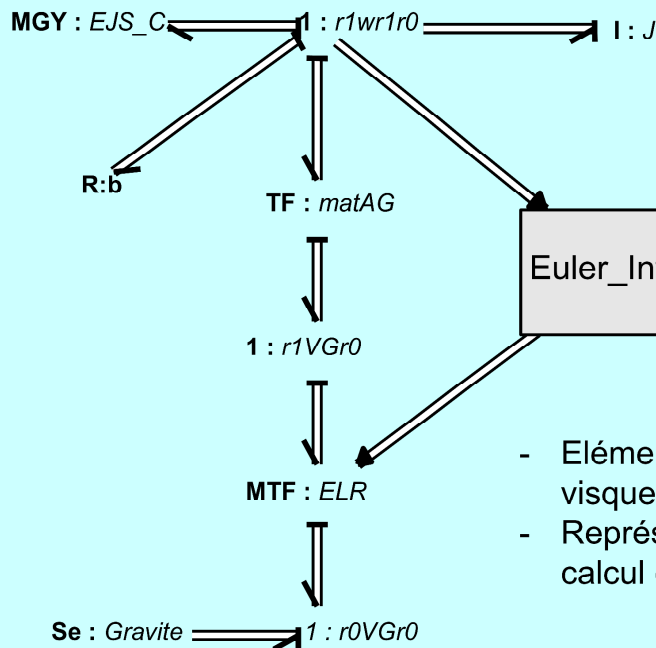
A est fixe

- ⇒ Les efforts appliqués en A ne travaillent pas
- ⇒ Suppression de la source d'efforts **Se:Cpl**
- ⇒ Suppression de la source **Se:ForceA** et de la jonction 0 associée.
- ⇒ Pas de translation. Donc suppression de **I:M**.

Bond Graph final de la Toupie



VI – Application : Toupie

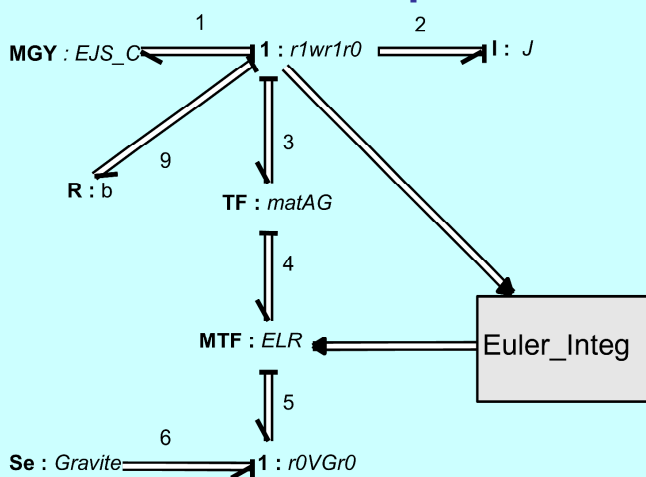


Bond Graph final de la Toupie (suite)

- Élément matriciel $R:b$ du frottement visqueux en rotation
- Représentation du bloc permettant le calcul de la matrice l'Euler ELR

VI – Application : Toupie

Ecriture des équations



Jonction $1:r1wr1r0$

$$\begin{cases} \underline{e2} = -\underline{e1} - \underline{e3} - R \cdot \underline{f9} \\ \underline{f1} = \underline{f9} = \underline{f3} = \{\underline{f2}\} \end{cases}$$

Jonction $1:r0VGr0$

$$\begin{cases} \underline{e5} = \{-\underline{e6}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \cdot g \end{bmatrix} \\ \underline{f6} = \{\underline{f5}\} \end{cases}$$

Élément $TF:matAG$

$$\begin{cases} \underline{e3} = \text{MatAG}^T \cdot \{\underline{e4}\} \\ \underline{f4} = \text{MatAG} \cdot \{\underline{f3}\} \end{cases}$$

$$\underline{AGI} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}$$

$$\text{MatAG} = \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Écriture des équations (suite)

Élément MTF:Euler

$$\begin{cases} \underline{e4} = ELR^T \cdot \{\underline{e5}\} \\ \underline{f5} = ELR \cdot \{\underline{f4}\} \end{cases} \quad \underline{e4} = \begin{pmatrix} c\varphi \cdot c\psi - s\varphi \cdot c\theta \cdot s\psi & -c\varphi \cdot s\psi - s\varphi \cdot c\theta \cdot c\psi & s\varphi \cdot s\theta \\ s\varphi \cdot c\psi + c\varphi \cdot c\theta \cdot s\psi & -s\varphi \cdot s\psi + c\varphi \cdot c\theta \cdot c\psi & -c\varphi \cdot s\theta \\ s\theta \cdot s\psi & s\theta \cdot c\psi & c\theta \end{pmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \cdot g \end{bmatrix}$$

$$\underline{e4} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cdot \sin \psi \cdot m g \\ \sin \theta \cdot \cos \psi \cdot m g \\ \cos \theta \cdot m g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

Élément MGY:EJS_C

$$\underline{e1} = \begin{pmatrix} \omega_y \cdot J_z \cdot \omega_z - \omega_z \cdot J_y \cdot \omega_y \\ \omega_z \cdot J_x \cdot \omega_x - \omega_x \cdot J_z \cdot \omega_z \\ \omega_x \cdot J_y \cdot \omega_y - \omega_y \cdot J_x \cdot \omega_x \end{pmatrix}$$

La vitesse de rotation est exprimée dans R1, repère des axes principaux d'inertie du solide.

Élément I:J (en causalité intégrale)

$$\begin{cases} \underline{e2} = J \cdot \underline{rl\dot{\omega}rlr0} \\ \underline{rl\dot{\omega}rlr0} = \underline{f2} = J^{-1} \cdot \int \underline{e2} \cdot dt \end{cases}$$

Obtention des équation du mouvement en fonction des angles d'EULER:

$$J_x \cdot \ddot{\theta} - J_x \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot c\theta \cdot s\theta + J_z \cdot (\dot{\varphi} \cdot c\theta + \dot{\psi}) \cdot \dot{\varphi} \cdot s\theta - h \cdot m \cdot g \cdot s\theta = 0$$

$$J_x \cdot \ddot{\varphi} \cdot s\theta + 2 \cdot J_x \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\theta} \cdot c\theta - J_z \cdot \dot{\theta} \cdot (\dot{\varphi} \cdot c\theta + \dot{\psi}) = 0$$

Bilan: la méthodologie des bond Graphs est aussi adaptée aux problèmes de dynamique des solides.

Modélisation de système dynamiques multi-physiques par Bond Graphs

- 9 -

Problèmes multi-corps

I - Méthode

Système mécanique à plusieurs corps

- Plusieurs corps solides supposés rigides
- La structure est arborescente constituée d'une chaîne ouverte de solides.
- Les liaisons sont supposées sans frottement sec.



- Pour chaque solide, on définit le repère des axes principaux d'inertie.
- Les solides sont notés $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ en s'éloignant du solide S_0 .
- Les repères sont indicés $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n$.
- Chaque repère R_k est attaché au solide S_k .
- Le repère R_0 (galiléen) est souvent désigné par **repère atelier**.

Boucle cinématique

Chemin

Il existe un chemin entre le solide j et le solide k si :

- les solides j et k sont reliés par une liaison ;
- entre les solides j et k il existe une succession de solides reliés par des liaisons.

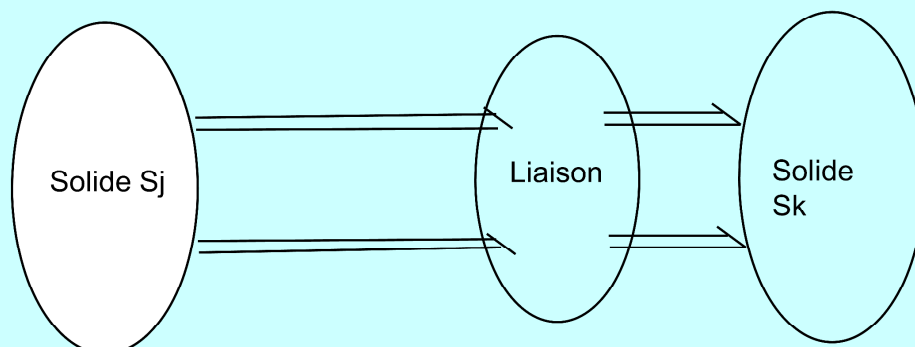
Chaîne fermée

Il existe une chaîne fermée quand on trouve plus d'un chemin entre deux solides.

Hypothèse : Nous supposons que le système ne possède **pas de chaîne fermée**.

Bond graph à mot : BGM

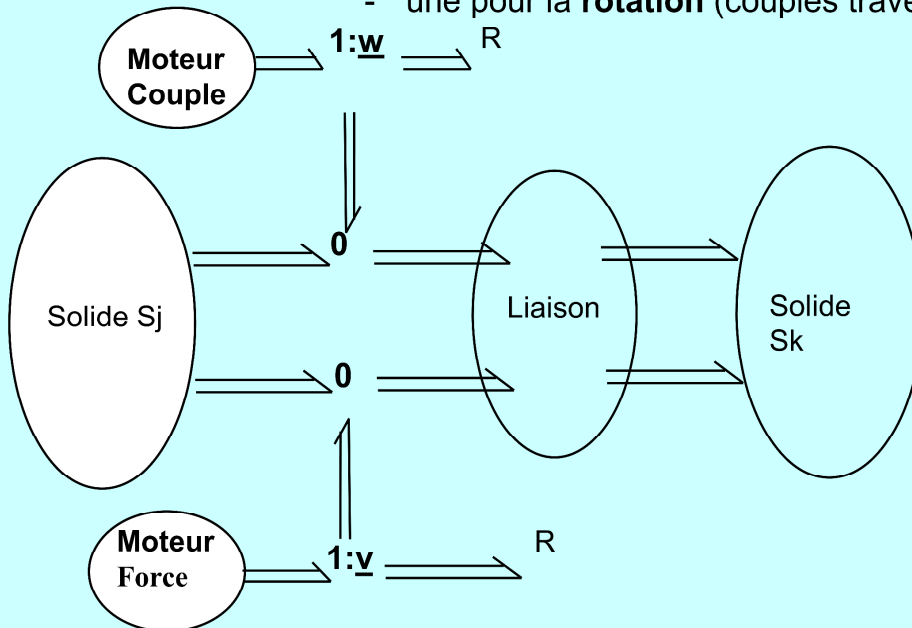
- Le solide S_k est représenté par une bulle contenant le mot désignant S_k .
- Chaque liaison est représentée



I - Méthode

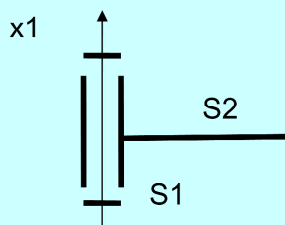
Entre deux solides, on trouve **deux jonctions zéro** :

- une pour la **translation** (forces traversant la liaison)
- une pour la **rotation** (couples traversant la liaison)



II - Liaisons

Liaison pivot



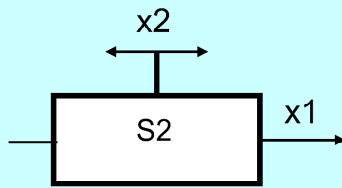
Le solide S2 tourne autour de l'axe x_1 du solide S1.
Les butées empêchent les translations.

$$\begin{array}{lcl}
 S_f : 0 & \longrightarrow & \\
 S_f : 0 & \longrightarrow & \\
 S_f : 0 & \longrightarrow & \\
 \hline
 S_f : 0 & \longrightarrow & \\
 S_f : 0 & \longrightarrow &
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1: r1V2 \\ 1: r1wr2r1 \end{array}$$

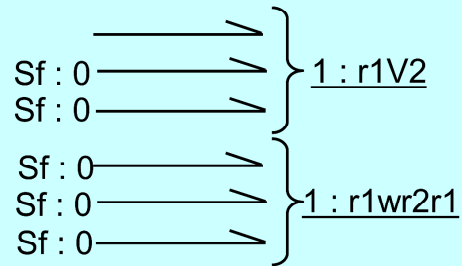
Seule la rotation selon x_1 est autorisée, toutes les autres vitesses sont nulles.

II - Liaisons

Liaison glissière



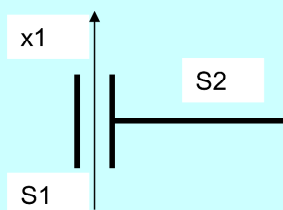
Le solide S2 glisse sans pivoter le long de l'axe x_1 du solide S1



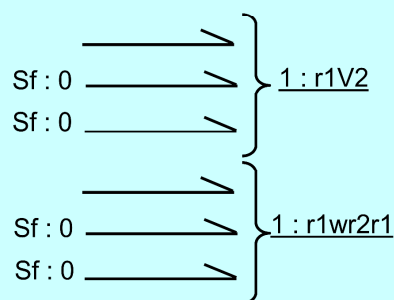
Seule la vitesse de translation de S2 le long de x_1 est libre, les autres vitesses sont contraintes à rester nulles.

II - Liaisons

Liaison pivot glissant



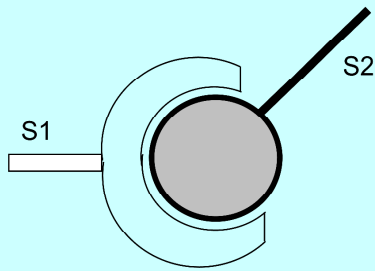
Le solide S2 pivote autour de l'axe x_1 lié à S1.
L'absence de butées autorise la translation de S2 le long de S1



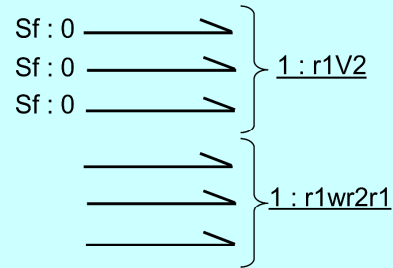
4 vitesses sont contraintes et 2 sont libres.

II - Liaisons

Liaison rotule



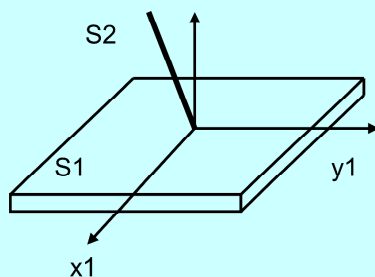
Le solide S2 possède une extrémité sphérique qui est maintenue dans une enveloppe sphérique liée à S1



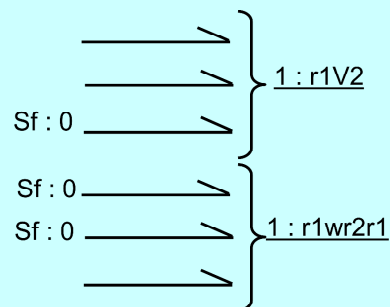
Toutes les vitesses de rotation sont libres, et toutes les vitesses de translation sont nulles.

II - Liaisons

Liaison appui sur un plan.

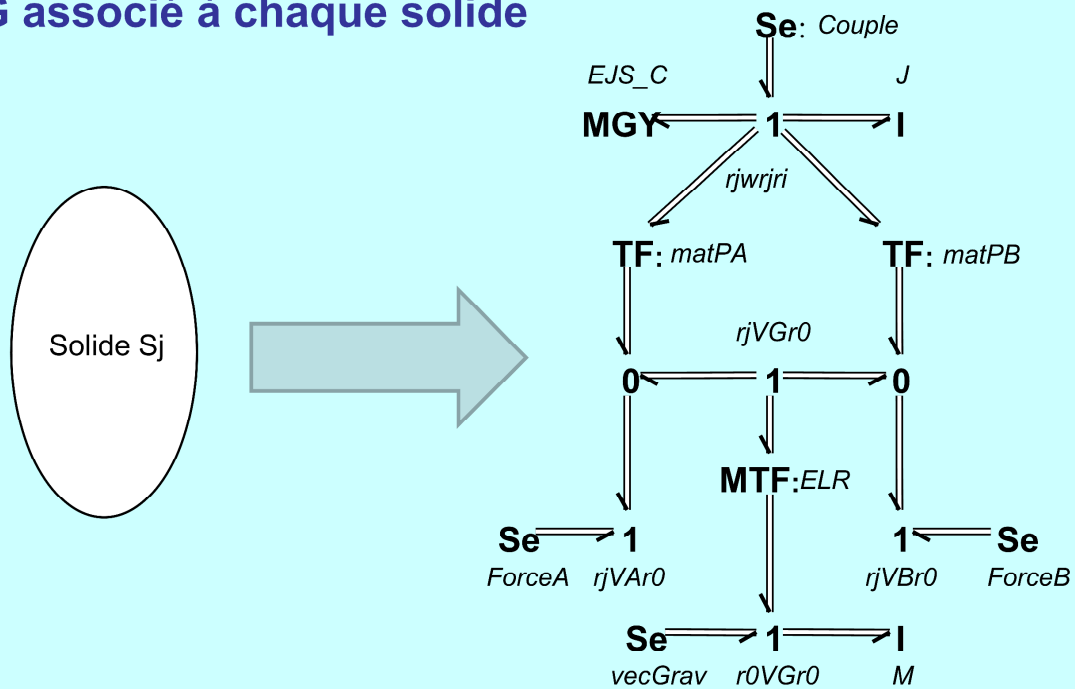


L'extrémité du solide S2 se déplace sur le plan de S1



Seule la vitesse selon z_1 est contrainte à rester nulle.
Deux vitesses de rotation sont nulles.

BG associé à chaque solide



Modélisation des liaisons

Les points A et B appartiennent au solide et représentent des liaisons.

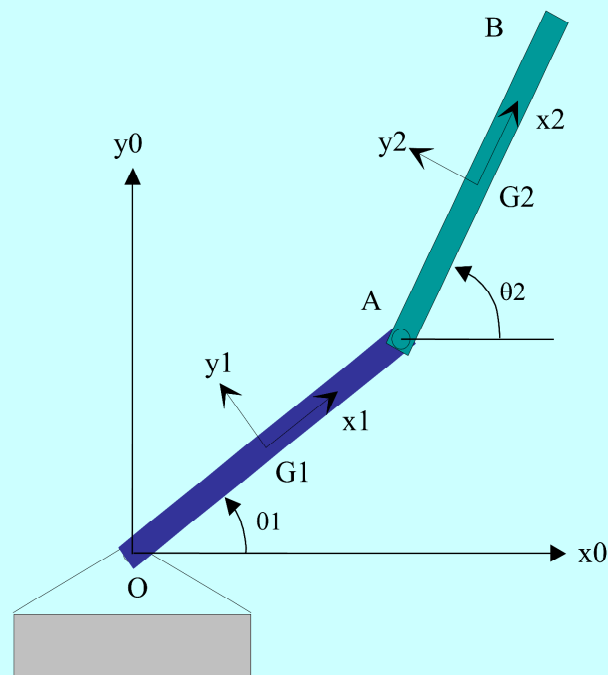
Les jonctions 0 représentent les efforts entre les solides :

- Au point A c'est l'effort appliqué par le solide i sur le solide j.
- Au point B c'est l'effort appliqué par le solide j sur le solide k.

Les contraintes associées aux liaisons se traduisent, pour certaines vitesses par des sources de flux nul : $S_f=0$.

Dans les liaisons on effectue un passage du repère R_i au repère R_j , pour la liaison en A, et du repère R_j au repère R_k , pour la liaison en B. Il faut donc des MTF dans les liaisons.

Exemple



Bond graph à mot

- a) On peut utiliser le BG général et le développer pour chaque solide.
- b) Il est préférable dans le cas des mouvements dans le plan de ne pas utiliser les liaisons vectorielles. Dans les repères choisis, chaque force se décompose selon les axes G_{ixi} et G_{iyi} .

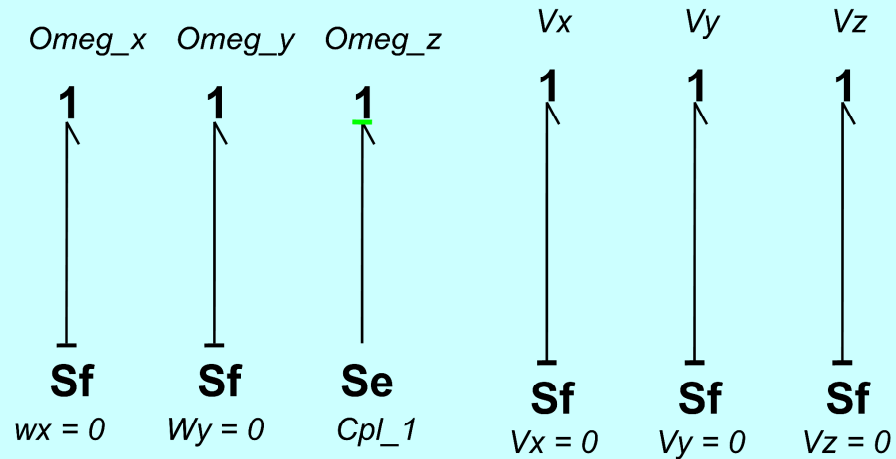
Avantage : le BG obtenu ne comporte que des liens simples. Le BGM comprendra 4 parties : 2 solides et 2 liaisons.

Liaison pivot

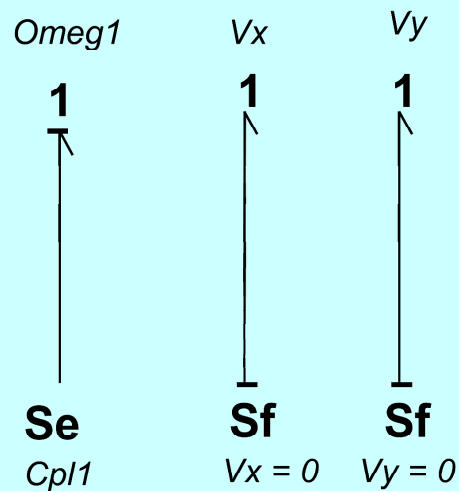
Les deux liaisons sont de type pivot.

Les mouvements sont dans le plan vertical, donc les vitesses de translation selon les axes Gizi sont nulles.

La figure 9.a présente la liaison dans le cas général.



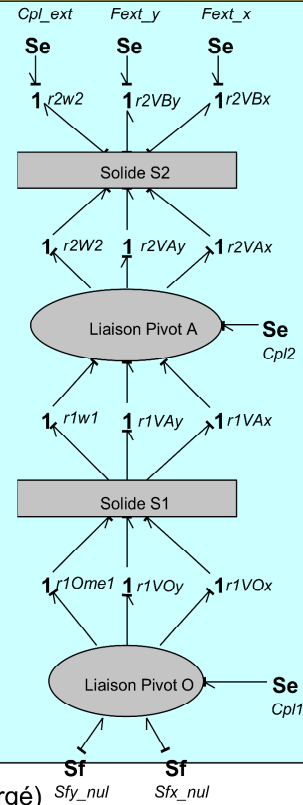
Cas particulier des mouvements dans le plan.



BGM (cas général)

2 solides réunis par liaison pivot :

Les 3 Se supérieurs permettent de tenir compte des efforts éventuellement appliqués sur le S2 par l'environnement.



QCM Bond Graph

Cocher la ou les réponses exactes.

Une réponse exacte donne 2 points. Une réponse partielle ou erronée retire un point.

Aucun document autorisé

Durée : 1 heure

3/100

Question 1

Choisir le (ou les) Bond Graphs corrects :

A	Se	→	1	→	0	→	1	→	0	R	C	R	C
B	Se	→	1	→	0	→	1	→	0	R	C	R	C
C	Se	→	1	→	0	→	1	→	0	R	C	R	C
D	Se	→	1	→	0	→	1	→	0	R	C	R	C

Question 2

Soit le Bond Graph de la figure 1. Cocher la ou les équations correctes en tenant compte de la causalité.

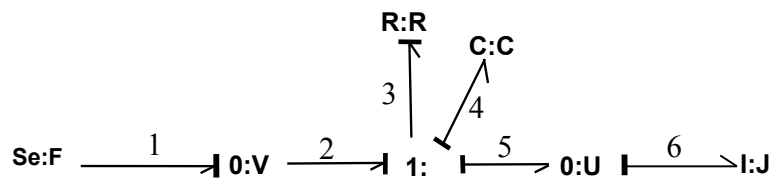


FIGURE 1 – Bond graph à étudier

$$A : \begin{cases} e_5 = \{e_6\} \\ f_5 = f_6 \end{cases} \quad B : \begin{cases} e_5 = \{e_6\} \\ f_6 = f_5 \end{cases} \quad C : \begin{cases} f_2 = f_5 = f_4 = \{f_3\} \\ e_3 = e_2 - e_5 - e_4 \end{cases} \quad D : \begin{cases} f_2 = f_5 = f_4 = \{f_3\} \\ e_3 = -e_2 + e_5 + e_4 \end{cases}$$

Question 3

Soit le Bond Graph de la figure 2. Cocher la ou les affirmations correctes.

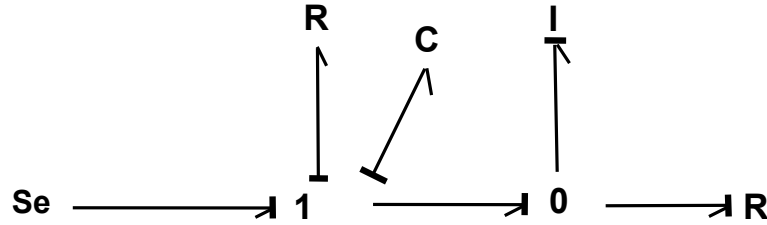


FIGURE 2 – Bond graph à étudier

- A : Le vecteur d'état possède trois composantes
- B : Le vecteur d'état possède deux composantes
- C : Le vecteur d'état possède une composante
- D : Le vecteur d'état possède quatre composantes

Question 4

Soit le Bond Graph de la figure 3. Cocher la ou les affirmations correctes.

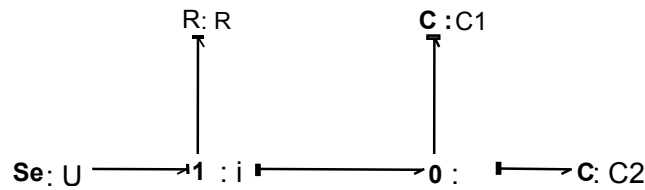


FIGURE 3 – Bond graph à étudier

Une représentation d'état associée au Bond Graph est :

$$A : \dot{x} = \frac{1}{R(1+C_1/C_2)}(U - \frac{x}{C_2}) \quad B : \dot{x} = \frac{1}{R(1+C_2/C_1)}(U - \frac{x}{C_1})$$

$$C : \dot{x} = \frac{1}{R(1-C_1/C_2)}(U + \frac{x}{C_2}) \quad D : \dot{x} = \frac{1}{R(1-C_2/C_1)}(U + \frac{x}{C_1})$$

Question 5

Soit le Bond Graph de la figure 4. Cocher la ou les affirmations correctes.

Donner les dimensions (lignes $\times$ colonnes) des matrices d'état A et B pour le Bond Graph de la figure 4 :

$$A : A(3,3) \text{ et } B(1,3) \quad B : A(2,2) \text{ et } B(2,1) \quad C : A(3,3) \text{ et } B(3,2) \quad D : A(2,2) \text{ et } B(2,2)$$

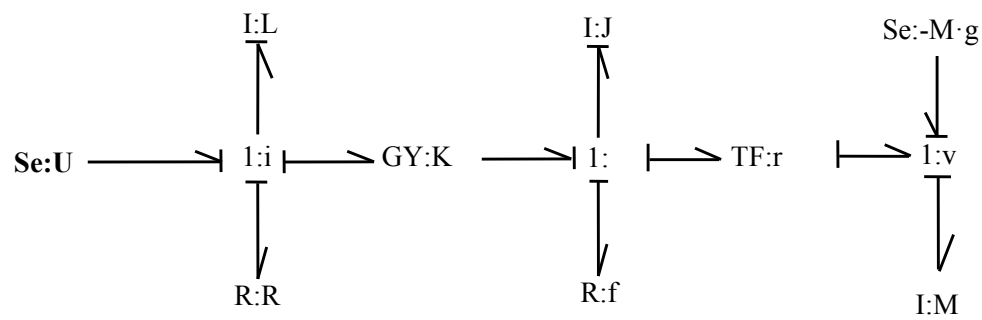


FIGURE 4 – Bond graph à étudier

Question 6

Un moteur à courant continu est caractérisé par R , L , K . Il entraîne une inertie J et l'on note f le frottement visqueux en rotation.

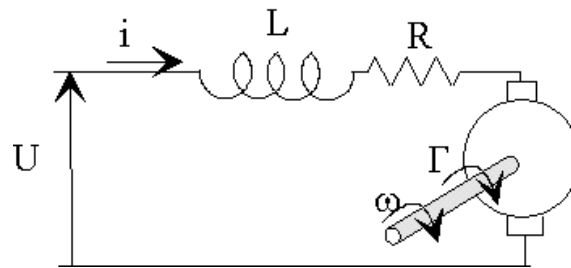
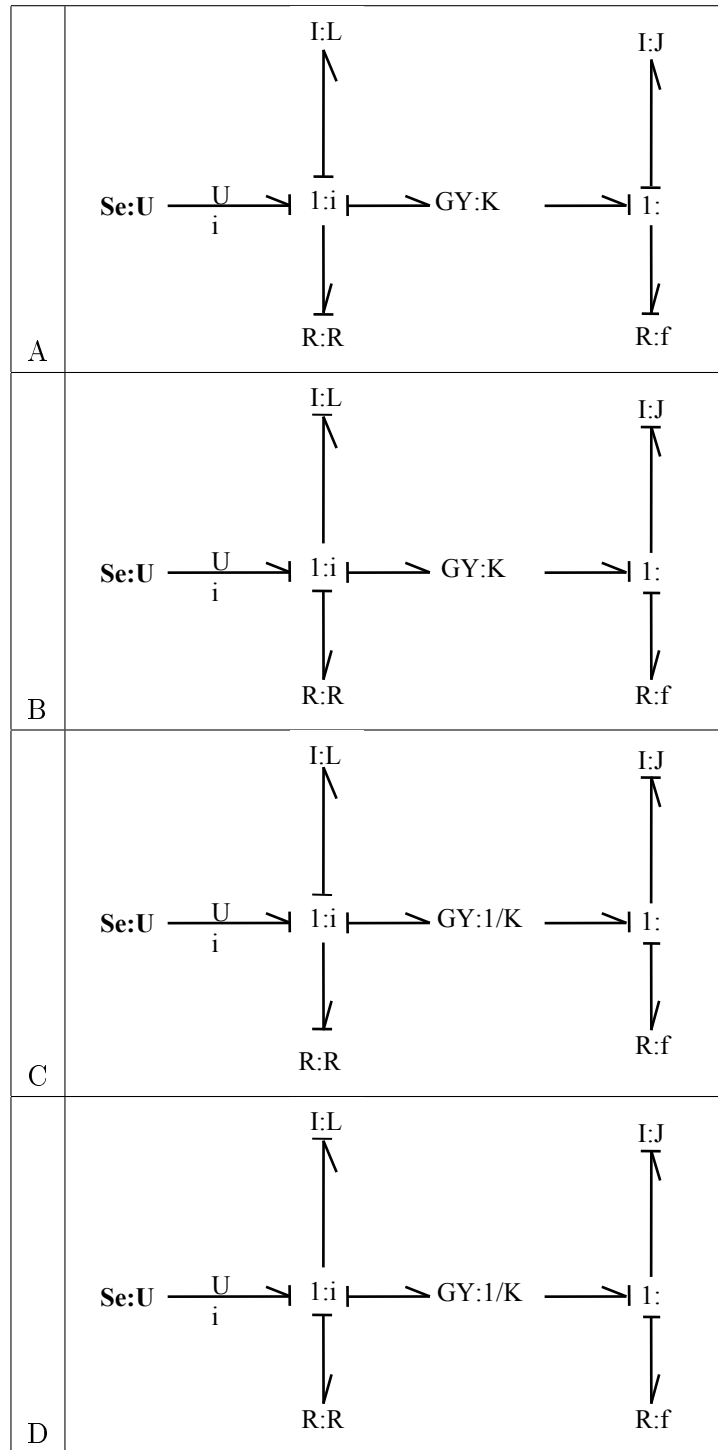


FIGURE 5 – Système à étudier

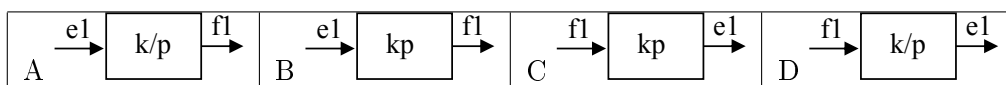
Choisir le (ou les) Bond Graphs corrects :



Question 7

Soit le Bond Graph de la figure 6.

En tenant compte des causalités, quel est le schéma équivalent associé à l'élément C :1/k ?



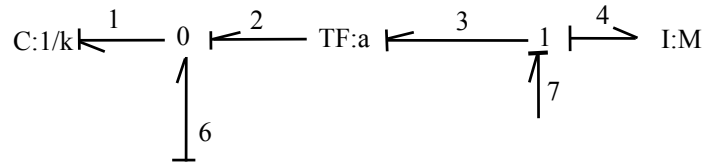


FIGURE 6 – Bond graph à étudier

Question 8

Soit le Bond Graph de la figure 7. Cocher la ou les affirmations correctes.

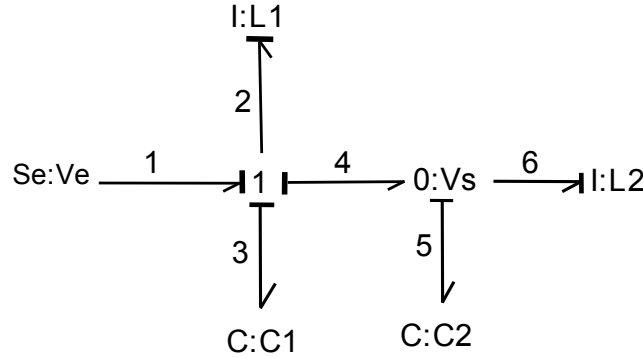


FIGURE 7 – Bond graph à étudier

La fonction de transfert $H(p)$ liant e_1 et f_6 est :

$$A : H(p) = \frac{C_1 p}{(1 + L_1 C_1 p^2)(1 + L_2 C_2 p^2) + L_2 C_1 p^2} \quad B : H(p) = \frac{L_2 C_1 p^2}{(1 + L_1 C_1 p^2)(1 + L_2 C_2 p^2) + L_2 C_1 p^2}$$

$$C : H(p) = \frac{1 + L_2 C_2 p^2}{(1 + L_1 C_1 p^2)(1 + L_2 C_2 p^2) + L_2 C_1 p^2} \quad D : H(p) = \frac{(1 + L_2 C_2 p^2) C_1 p}{(1 + L_1 C_1 p^2)(1 + L_2 C_2 p^2) + L_2 C_1 p^2}$$

Question 9

Cocher la ou les affirmations exactes. En hydraulique, les associations sont (P : pression, Q : débit volumique, V : vitesse) :

$$A : \begin{cases} e : P \\ f : V \end{cases} \quad B : \begin{cases} e : P \\ f : Q \end{cases} \quad C : \begin{cases} f : P \\ e : Q \end{cases} \quad D : \begin{cases} f : P \\ e : V \end{cases}$$

Question 10

A quelle conditions les deux Bond Graphs de la figure 8 sont-ils équivalents ?

$$A : R : m^2 \times b \quad B : R : m^2 / b \quad C : R : m \times b \quad D : R : b / m$$

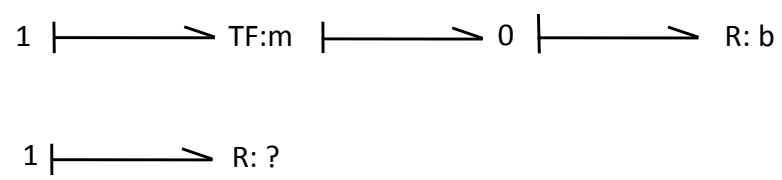
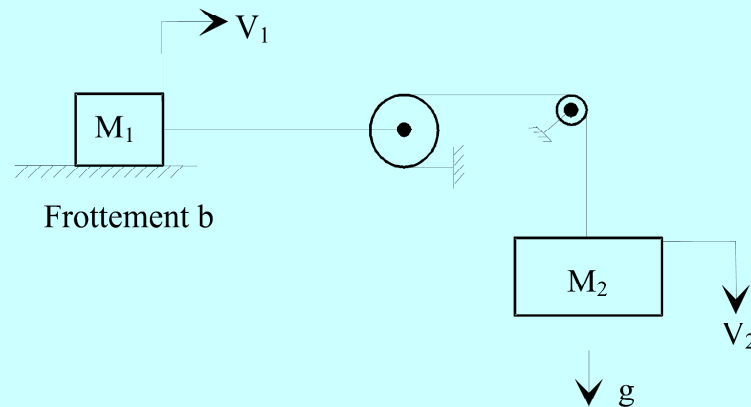


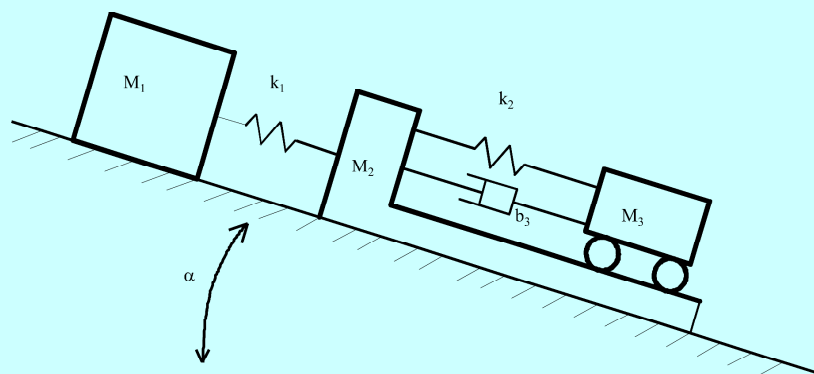
FIGURE 8 – Bond graphs à étudier

Exercice 1: Etude d'une poulie



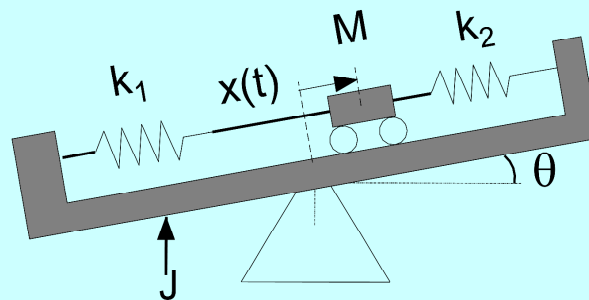
- 1) Par quel élément peut-on modéliser la poulie?
- 2) Dessiner le, ou les Bond Graphs, associé(s) au système.
- 3) Placer les causalités.
- 4) En utilisant la méthode de la fonction de transfert, déterminer $V_1/(M_1g)$.
- 5) En utilisant la représentation d'état, déterminer $V_1/(M_1g)$.

Exercices 2 : Masses en pente



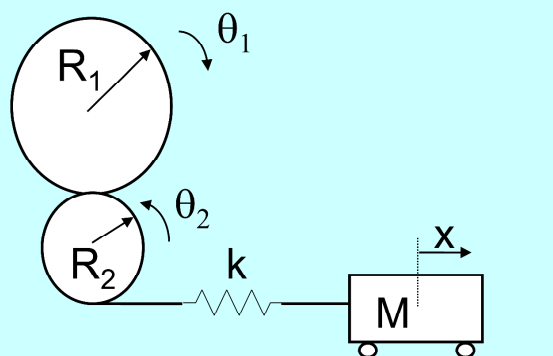
- 1) Effectuer un bilan des forces extérieures agissant sur chaque masse.
- 2) Tracer le Bond Graph du système.
- 3) Déterminer les causalités.
- 4) Combien de composantes aura le vecteur d'état?
- 5) Nommer ces composantes.

Exercice 1: Etude d'une balançoire



- 1) Déterminer les expressions littérales de la force et du couple appliqués par la gravité à la balançoire.
- 2) Modéliser l'action de la gravité à l'aide de transformateurs.
- 3) Construire le Bond Graph complet du système.
- 4) Déterminer la représentation d'état du système.
- 5) Le système est-il linéaire?

Exercice 2: Etude d'un engrenage



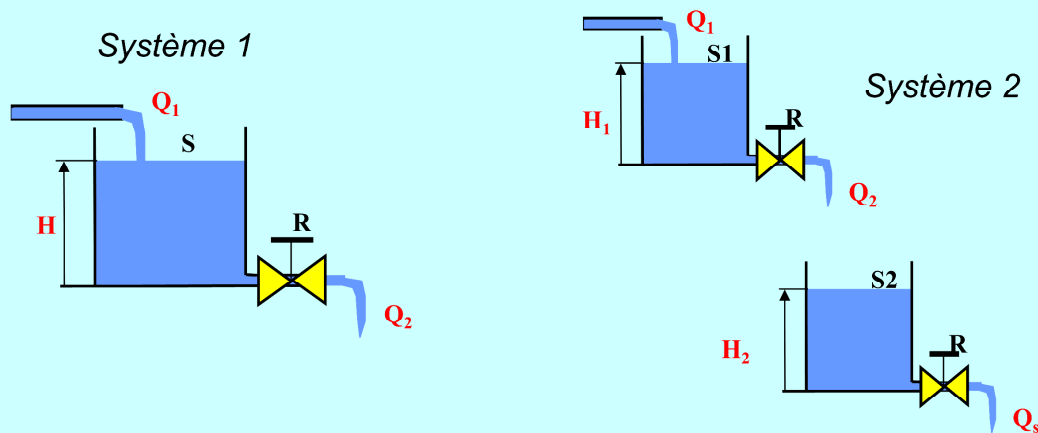
- 1) Quel élément peut servir à modéliser un engrenage?
- 2) Construire le Bond Graph complet du système.
- 3) À quoi est équivalente la mise en série de deux transformateurs?
- 4) Simplifier le Bond Graph en conséquence.
- 5) Déterminer la fonction de transfert x/θ_1 .

Bond Graphs – TD3

Exercice 1

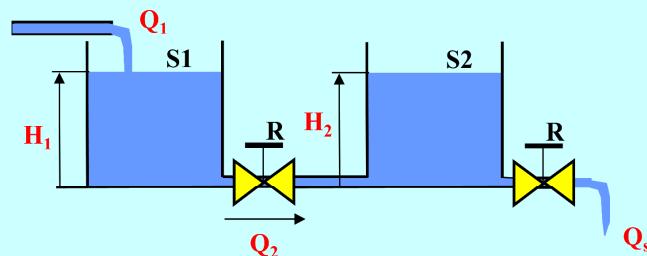
On fait l'hypothèse des écoulements turbulents.

Pour les trois systèmes suivants, déterminer le régime stationnaire ainsi que la représentation d'état associée.



Bond Graphs – TD3

Système 3



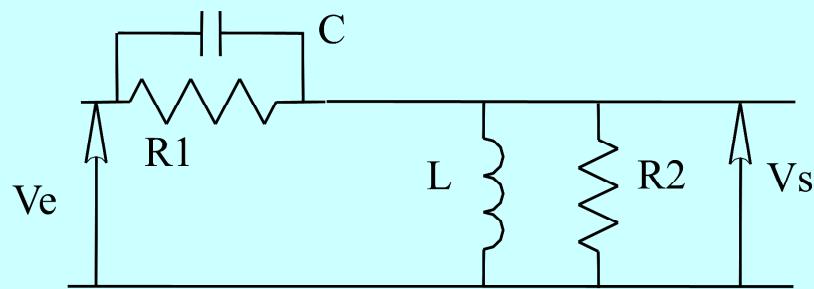
Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent dans l'hypothèse d'un écoulement laminaire.

Bond Graphs – TD4

Exercice 1

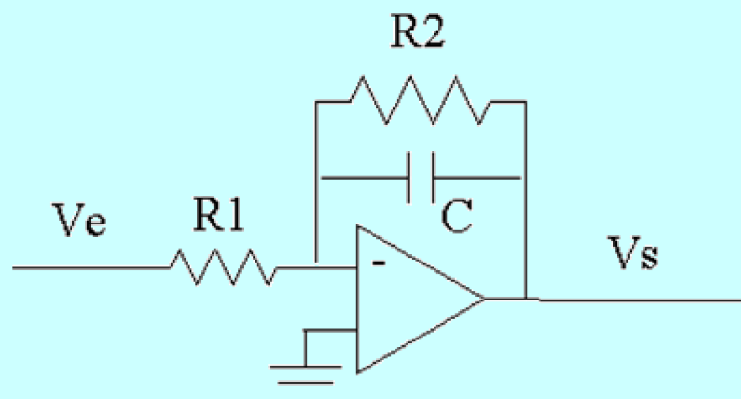
En utilisant la méthode de résolution graphique des Bond Graphs, déterminer la fonction de transfert du système électrique suivant:



Bond Graphs – TD4

Exercice 2

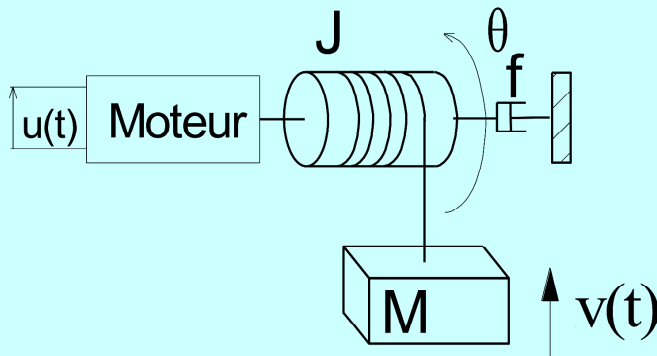
En utilisant la méthode de résolution graphique des Bond Graphs, déterminer la fonction de transfert du système électrique suivant:



Bond Graphs – TD5

Exercice 1

En utilisant la méthode de résolution graphique des Bond Graphs, déterminer la fonction de transfert du système électromécanique suivant:



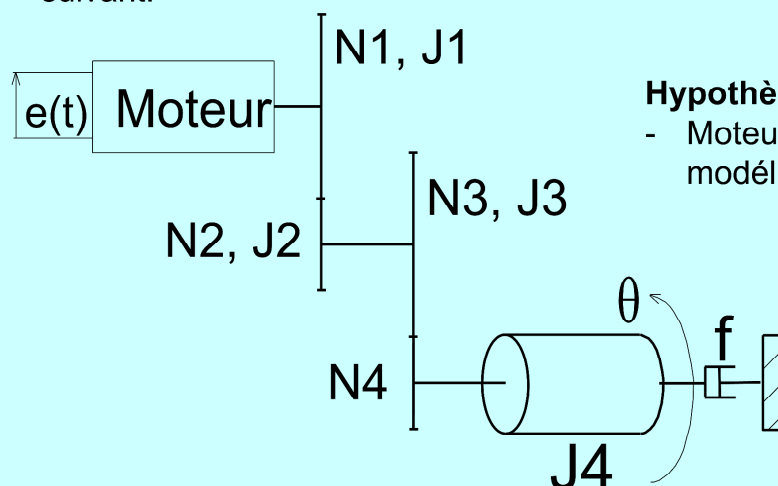
Hypothèses:

- Moteur à courant continu modélisé par R, L, K
- Treuil de rayon R_t :

Bond Graphs – TD5

Exercice 2

En utilisant la méthode de résolution graphique des Bond Graphs, déterminer la fonction de transfert du système électromécanique suivant:



Hypothèses:

- Moteur à courant continu modélisé par R, L, K

BIBLIOGRAPHIE

Karnop D., Margolis D., Rosenberg R. (1990)

Systems dynamics: A unified approach.

John Wiley and Sons, New York.

Rosenberg R., Karnop D. (1983)

Introduction to physical systems dynamics.

Mc Graw-Hill, New York.

Vergé M., Jaume D. (2004)

Modélisation structurée des systèmes dynamiques avec les BG.

Technip Paris.

Borne P., Dauphin-Tanguy G., Richard J. P., Rotella F., Zambettakis I. (1992)

Modélisation des systèmes physiques par bond graphs.

Dans : Modélisation et identification des processus, tome 2.

Editions Technip, Paris.

SIMULATEURS INDUSTRIELS

20-SIM

www.20sim.com



Dymola

www.3ds.com/fr/products/catia/portfolio/dymola

